

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Γ' ΤΑΞΗΣ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

Σχ. Έτος: 2026-27

ΑΣΚΗΣΕΙΣ



Φωκάς Δημήτριος – Μαθηματικός

Συλλογή ασκήσεων για το 1^ο κεφάλαιο

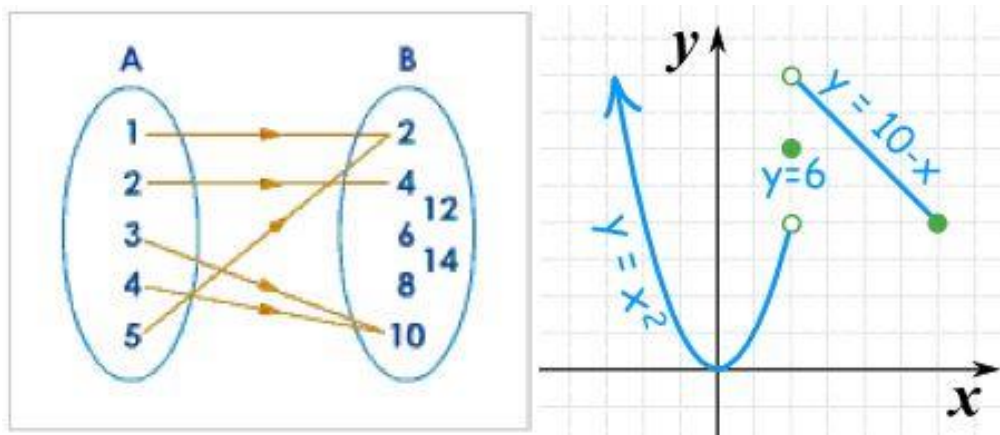
Περιεχόμενα 1^{ου} Κεφαλαίου

Πεδίο ορισμού	4
Σύνολο τιμών.....	8
Γραφικές παραστάσεις.....	11
Ισότητα συναρτήσεων	15
Πράξεις με συναρτήσεις	16
Σύνθεση Συναρτήσεων	19
Μονοτονία Συνάρτησης.....	21
Ακρότατα Συνάρτησης	23
Συνάρτηση ‘1-1’	24
Αντίστροφη Συνάρτηση.....	26
Όριο συνάρτησης στο $x \in \mathbb{R}$	28
Μη πεπερασμένο όριο στο $x_0 \in \mathbb{R}$	33
Όριο συνάρτησης στο άπειρο.....	36
Συνέχεια Συνάρτησης	40
Θεώρημα Bolzano	42
Συνέπειες Θεωρήματος Bolzano - Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών	44
Θεώρημα Μέγιστης – Ελάχιστης τιμής.....	45
Επέκταση Bolzano – Σύνολο τιμών – Πρόσημο της f	46
Επαναληπτικές ασκήσεις 1 ^{ου} κεφαλαίου	48

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΑΝΑΛΥΣΗ

Όριο – Συνέχεια



Ερωτήσεις ανάπτυξης

Πεδίο ορισμού

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = \frac{x+5}{x^3-3x^2+2x} \quad \beta) f(x) = \sqrt{\frac{x^2-2x-3}{x^2+x}}$$

$$\gamma) f(x) = \frac{1}{\sqrt{x-2}} + \frac{1}{\sqrt{9-x^2}} \quad \delta) f(x) = \log_{x+1}(x^2-4)$$

2. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

$$\text{i)} \quad f(x) = \frac{x+2}{x^2-3x+2}$$

$$\text{ii)} \quad f(x) = \sqrt{x-1} + \sqrt{2-x}$$

$$\text{iii)} \quad f(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

$$\text{iv)} \quad f(x) = \ln(1-e^x)$$

3. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = \frac{x-1}{x^2-5x+6} \quad \beta) f(x) = x^3+4x-5$$

$$\gamma) f(x) = \sqrt{x^2-2x-3}$$

$$4. \text{ Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} x^2-3, & \alpha\nu \quad -5 \leq x \leq 1 \\ 4x-2, & \alpha\nu \quad 1 < x < 15 \end{cases}$$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

ii) Να βρείτε τις τιμές f(-2), f(3), f(1)

iii) Να λύσετε την εξίσωση f(x)=6

5. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = 3x^2 + 5x - 2$

- a. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
- b. Να υπολογίσετε τις τιμές: $f(0)$, $f(-2)$ και $f(1)$
6. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:
- a. $f(x) = \frac{1}{x-3}$ b. $g(x) = \sqrt{x-2}$ c. $h(x) = \ln(x+1)$
7. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:
- i) $f(x) = \sqrt{x-10} + \frac{1}{x-2}$ ii) $f(x) = \frac{3x+1}{|x|-x}$
8. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \begin{cases} -3, & x \leq 0 \\ 3\eta\mu x, & 0 < x \leq \pi \\ x^2 + 1, & x > \pi \end{cases}$
- α. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της συνάρτησης;
- β. Να υπολογίσετε τις τιμές: $f(-10)$, $f(\frac{\pi}{3})$, $f(\sqrt{30})$
9. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f όταν:
- α) $f(x) = \frac{\sqrt{4-x}}{1-|x|}$ b) $f(x) = \ln\left(\frac{2-x}{2+x}\right)$ c) $f(x) = \sqrt{\frac{e^x-1}{x}}$
10. Ομοίως
- i) $f(x) = \sqrt{\frac{x-7}{3x-5}}$ ii) $f(x) = \sqrt[5]{x-5} + \sqrt{x^2-4}$
11. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων:
- i) $f(x) = \log_{x-5}(25-x^2)$ ii) $f(x) = (2x^2-2)^x$

12. Ομοίως:

$$\alpha) f(x) = \frac{\sqrt{16-x^2}}{|x-1|-2}$$

$$\beta) g(x) = \frac{\ln(-x^2+3x+4)}{2^x-8}$$

$$\gamma) h(x) = \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^x - \frac{1}{9}}}{\ln(x+3)}$$

$$\delta) \varphi(x) = \sqrt{\pi^2 - x^2} + \varepsilon \varphi x$$

$$\varepsilon) \omega(x) = (|2x+3|-5)^{\sqrt{3-\ln x}}$$

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sqrt{x+a}}{x-3}$ για την οποία ισχύει $f(33) = \frac{1}{5}$. Να

βρείτε:

α) την τιμή του a ,

β) το πεδίο ορισμού της f ,

γ) τις τιμές $f\left(\frac{13}{4}\right)$ και $f(f(6))$.

14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x, & \alpha - 5 \leq x \leq -2 \\ |x| + \beta, & -2 < x < 6 \end{cases}$

Για την οποία ισχύει $f(-4)=8$ και $f(-1)=0$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β) Να βρείτε τους αριθμούς α και β .

γ) να βρείτε τις τιμές $f(-2)$ και $f(f(-3))$.

δ) να λύσετε την εξίσωση $f(x)=3$.

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \alpha + \ln \frac{2x}{x+1}$, για την οποία ισχύει $f(1)=0$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f και την τιμή του α .

β) Να βρείτε τις ρίζες της f .

16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(\sqrt{x^2+1} - x)$.

Να δείξετε ότι η f έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$.

17. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α) $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$

β) $g(x) = \frac{2-x}{x^2-3x+2} - \frac{x^3}{x^2-x+4}$

γ) $h(x) = \frac{\eta\mu x + 1}{x^3 + x^2 - 10x + 8}$

δ) $\varphi(x) = \frac{\sigma\upsilon\nu x}{1 + \frac{1}{x^3}} + \frac{1}{x^4 + 2}$

ε) $t(x) = \frac{3^{|x|} + 1}{|2x+3| - 3} + \frac{|x^2 - 1|}{|4 - 3x| + 2}$

στ) $k(x) = \frac{\varepsilon\varphi x}{2\sigma\upsilon\nu x - 1} - \frac{\sigma\varphi x}{\eta\mu 3x - 2}$

ζ) $s(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - 4} + \frac{2^x + 4}{e^{3x} + 1}$

η) $r(x) = \frac{1 - \eta\mu 2x}{9^{\eta\mu x} + 3^{\eta\mu x} - 90} - \frac{\sigma\upsilon\nu 3x}{e^{|x|-1} - 1}$

18. Ομοίως

i) $f(x) = \sqrt{2-x} - \sqrt{x^2 - 4x + 3}$

ii) $g(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 9} + 2}{\sqrt{4x - x^2}}$

iii) $h(x) = \ln(x^3 - 3x + 2) - 3\ln(2\eta\mu x + 3)$

iv) $\varphi(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$

v) $t(x) = \ln\left(\frac{x^2 + x - 6}{x - 1}\right)$

vi) $k(x) = \frac{\ln(x^2 + 4x + 4)}{3 - \sqrt{x^3 + 1}}$

vii) $s(x) = \frac{\sqrt{3 - |2 - x|} - \ln(x^2 - 5)}{1 + \sqrt{|x - 4|} + 2}$

viii) $r(x) = \frac{\ln(1 + \ln x) - \sqrt{3 - e^x}}{\sqrt{1 - \ln(e - e^x)}}$

19. Να βρείτε το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $f(x) = \ln\left(\frac{x}{e^x - 1}\right)$

ii) $g(x) = \sqrt{\frac{\ln x}{1 + \ln x}}$

iii) $h(x) = 3\ln(2\eta\mu 3x + 5) - 2\ln(\sqrt{x^2 + 1} + x)$ iv) $\varphi(x) = \frac{\ln(1 - \eta\mu x)}{\sqrt{\ln(x^2 + 1)}}$

20. Να προσδιορίσετε τις τιμές της παραμέτρου λ , ώστε η συνάρτηση f να έχει πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}$, όταν:

i) $f(x) = \frac{2x + 3}{4x^2 - 8\lambda x + 2\lambda^2 + \lambda + 3}$ ii) $f(x) = \sqrt{(\lambda - 1)x^2 + (\lambda - 4)x + \lambda - 1}$

21. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $f(x) = \frac{x + 2}{x^2 - 3x + 2}$ ii) $f(x) = \sqrt[3]{x - 1} + \sqrt{2 - x}$ iii) $f(x) = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$

iv) $f(x) = \ln(1 - e^x)$

22. Ομοίως

i) $f(x) = \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{x}$ ii) $f(x) = \sqrt{1 - \ln x}$

Σύνολο τιμών

23. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x - 1}{|x + 5| - 2}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

ii. Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{1}{3}$ ανήκει στο σύνολο τιμών της f .

24. Να εξετάσετε, αν:

α. ο αριθμός 2 ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης

$$f(x) = 1 + \sqrt{x},$$

β. ο αριθμός 0 ανήκει στο σύνολο τιμών της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{x}$$

25. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 + e^x$

α. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

β. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 2018$ έχει μία, τουλάχιστον, λύση.

γ. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = a^2 + 1$ έχει μία τουλάχιστον λύση,

για κάθε $a \in \mathbb{R}^*$.

26. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{\ln(x^2 - 1)}$.

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

ii. Να εξετάσετε αν το 1 ανήκει στο σύνολο τιμών της f.

27. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + 3}{x^2 - 5x + 6}$

i. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f.

ii. Να εξετάσετε αν ο αριθμός 1 ανήκει στο σύνολο τιμών της f.

iii. Να εξετάσετε αν ο αριθμός -1 ανήκει στο σύνολο τιμών της f.

28. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{4 - \sqrt{x-3}}$. Να βρείτε:

- i. το πεδίο ορισμού της, ii. Το σύνολο τιμών της.

29. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

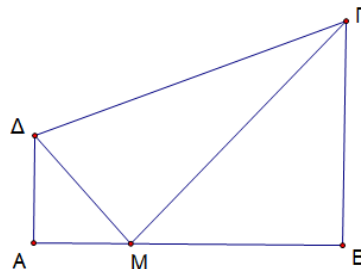
$$f(x-2) - 2f(4-x) = -x^2 + 12x - 26 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) - 2f(2-x) = -x^2 + 8x - 6$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

β) Να βρείτε τον τύπο της f .

30. Στο τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$, με $\hat{A} = \hat{B} = 90^\circ$, είναι $AB=6$, $B\Gamma=4$ και $A\Delta=2$.

Θεωρούμε σημείο M της AB που απέχει x από το σημείο A . Να εκφράσετε ως συνάρτηση του x :



α) το εμβαδόν του τριγώνου $\Gamma\Delta M$,

β) την περίμετρο του τριγώνου $\Gamma\Delta M$.

31. Να βρεθούν τα πεδία τιμών των συναρτήσεων:

1) $f(x)=3x+2$ 2) $f(x)=\frac{x+1}{x-2}$ 3) $f(x)=\sqrt{3x+6}-4$

4) $f(x)=|x-2|-5$ 5) $f(x)=x^2+x-2$ 6) $f(x)=\frac{x+3}{x^2+3x+4}$

Γραφικές παραστάσεις

32. Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$, όταν:

i) $f(x) = x^2 - 4x + 3$, ii) $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$, iii) $f(x) = e^x - 1$

33. Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g , όταν:

i) $f(x) = x^3 + 2x + 1$ και $g(x) = x + 1$

ii) $f(x) = x^3 + x - 2$ και $g(x) = x^2 + x - 2$.

34. Οι ανθρωπολόγοι εκτιμούν ότι το ύψος του ανθρώπου δίνεται από τις συναρτήσεις: $A(x) = 2,89x + 70,64$ (για τους άνδρες) και $\Gamma(x) = 2,75x + 71,48$ (για τις γυναίκες). Όπου x σε εκατοστά, το μήκος του βραχίονα. Σε μία ανασκαφή βρέθηκε ένα οστό από βραχίονα μήκους 0,45m.

α) Αν προέρχεται από άνδρα ποιο ήταν το ύψος του;

β) Αν προέρχεται από γυναίκα ποιο ήταν το ύψος της;

35. Σύρμα μήκους $l=20\text{cm}$ κόβεται σε δύο κομμάτια με μήκη $x\text{ cm}$ και $(20-x)\text{ cm}$.

Με το πρώτο κομμάτι σχηματίζουμε τετράγωνο και με το δεύτερο ισόπλευρο τρίγωνο. Να βρείτε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων ως συνάρτηση του x .

36. Να βρεθούν τα κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων:

$$f(x) = x^3 + x - 2 \quad \text{και} \quad g(x) = x^3 - 2x + 7$$

37. Να βρεθούν τα σημεία τομής της συνάρτησης f με $f(x) = e^x - 2$ με τους άξονες.

38. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^3 + 2x^2 - 2x - 2$ και $g(x) = x^2 + 2x + 2$.

Να βρείτε:

i) τα κοινά σημεία των C_f και C_g

ii) τα διαστήματα στα οποία η C_f είναι πάνω από την C_g

39. Δίνονται οι συναρτήσεις $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ και $g : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει: $f(x) = g(x) + \ln x - 1$, για κάθε $x \in (0, +\infty)$. Να βρείτε τη σχετική θέση των γραφικών τους παραστάσεων.

40. Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ η γραφική παράσταση της συνάρτησης f βρίσκεται πάνω από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g , όταν:

$$f(x) = 2 \ln x + 3 \quad \text{και} \quad g(x) = \ln^2 x + \ln x + 1$$

41. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln(x+3) + a}{\sqrt{7-x}}$, όπου $a \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f . β) Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(-2, 4)$, να βρείτε τον αριθμό a .

42. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 - 4x + 12}{\sqrt{x+1}}$. Να βρείτε τα σημεία τομής

της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.

43. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 + a}{|x-1| + 2}$, με $a \in \mathbb{R}$. Η γραφική παράσταση της f

τέμνει τον άξονα $y'y$ στο -3 . Να βρείτε:

α) το πεδίο ορισμού της f , β) τον αριθμό a , γ) τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται πάνω από τον άξονα $x'x$.

44. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 - 3x$, $g(x) = 2|x| - 3x$ και $h(x) = x + 5$.

Να βρείτε: α) τα σημεία τομής των γραφικών παραστάσεων των f και g .

β) τα διαστήματα στα οποία η γραφική παράσταση της f βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της h .

45. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2$ και η ευθεία $\varepsilon: y = ax + \beta$.

α. Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.

β. Να βρείτε τα διαστήματα του x , που η C_f είναι πάνω από τον άξονα $x'x$

γ. Αν οι C_f και ε τέμνονται πάνω στην ευθεία $\eta: x=1$ και η ε διέρχεται από το σημείο $B(-1,3)$, να βρείτε τα a, β .

46. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^4 + 1$ και $g(x) = x^2 + 1$. Να βρείτε τα διαστήματα του x , στα οποία η γραφική παράσταση της f είναι κάτω από τη γραφική παράσταση της g .

47. Έστω $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις, για τις οποίες ισχύει $f(x) = g(x) + x^2 - 4$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τη σχετική θέση των C_f και C_g .

48. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση:

i) $f(x) = \frac{|x|}{x} + 1$

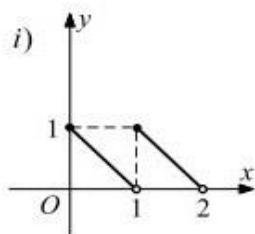
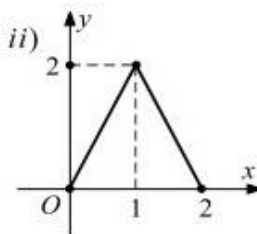
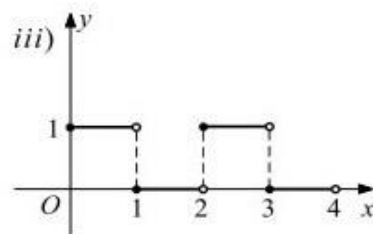
ii) $f(x) = x|x|$

iii) $f(x) = \begin{cases} -x+3, & x < 1 \\ x+1, & x \geq 1 \end{cases}$

iv) $f(x) = |\ln x|$

και από τη γραφική παράσταση να προσδιορίσετε το σύνολο των τιμών της f σε καθεμιά περίπτωση.

49. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση f , της οποίας η γραφική παράσταση είναι:



50. Ένα κουτί κυλινδρικού σχήματος έχει ακτίνα βάσης x cm και όγκο 628cm^3 .

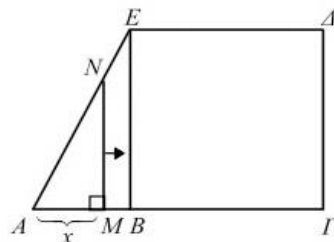
Το υλικό των βάσεων κοστίζει 4 λεπτά του ευρώ, ανά cm^2 , ενώ το υλικό της κυλινδρικής επιφάνειας 1,25 λεπτά του ευρώ, ανά cm^2 . Να εκφράσετε το συνολικό κόστος ως συνάρτηση του x . Πόσο κοστίζει ένα κουτί με ακτίνα βάσης 5cm και ύψος 8cm;

51. Στο παρακάτω σχήμα είναι $AB=1, AG=3$ και $\Gamma\Delta=2$. Να εκφράσετε το εμβαδόν

του γραμμοσκιασμένου χωρίου ως

συνάρτηση του $x=AM$, όταν το M

διαγράφει το ευθύγραμμο τμήμα AG .



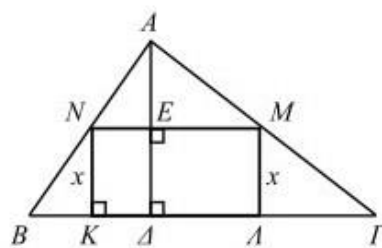
52. Ένα ορθογώνιο $KLMN$ ύψους x cm είναι εγγεγραμμένο σε ένα τρίγωνο $AB\Gamma$

βάσης $B\Gamma=10$ cm και ύψους $AD=5$ cm. Να

εκφράσετε το εμβαδόν E και την

περίμετρο P του ορθογωνίου ως

συνάρτηση του x .



53. Να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση:

$$\text{i) } f(x) = \frac{|x+1| + |x-1|}{2} \quad \text{ii) } f(x) = \frac{\eta\mu x + |\eta\mu x|}{2}, x \in [0, 2\pi].$$

Από τη γραφική παράσταση της f να προσδιορίσετε το σύνολο τιμών της σε καθεμιά περίπτωση.

Ισότητα συναρτήσεων

54. Να εξετάσετε σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις είναι $f=g$. Στις

περιπτώσεις που είναι $f \neq g$ να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο

του $\mathbb{R}$ στο οποίο ισχύει $f(x)=g(x)$.

$$\text{i) } f(x) = \sqrt{x^2} \text{ και } g(x) = (\sqrt{x})^2 \quad \text{ii) } f(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} \text{ και } g(x) = \sqrt{x}+1$$

55. Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις να εξετάσετε αν οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες. Αν δεν είναι ίσες, να βρείτε το ευρύτερο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ισχύει $f(x)=g(x)$:

α) $f(x) = \frac{x^2 + 2|x|}{x^2 - 4}$ και $g(x) = \frac{|x|}{|x| - 2}$

β) $f(x) = \sqrt{x-2}\sqrt{x+4}$ και $g(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 8}$

56. Δίνονται οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \frac{|x|}{|x| - 1} \text{ και } g(x) = \frac{x^2 + |x|}{x^2 - 1}$$

Να εξετάσετε, αν οι συναρτήσεις f και g είναι ίσες.

57. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \ln x^2$ και $g(x) = 2\ln|x|$

α. Να εξετάσετε, αν οι f και g είναι ίσες.

β. Αν $f \neq g$, να βρείτε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ στο οποίο ισχύει $f(x)=g(x)$.

Πράξεις με συναρτήσεις

58. Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$4x^2 + 2(f+g)(x)[(f+g)(x) - 2x] \leq [(f+g)(x)]^2 - [(f-g)(x)]^2$$

να αποδειχθεί ότι $f = g$.

59. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{\ln(x+3)}{\sqrt{4-x}}$ και $g(x) = \frac{\ln(x-1)}{\sqrt{4-x}}$.

Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ και f/g .

60. Έστω οι συναρτήσεις:

$$f(x) = \sqrt{e^x - 1}, \quad g(x) = \frac{x-1}{x-2}, \quad h(x) = \begin{cases} 1, & \text{αν } x \geq 2 \\ -1, & \text{αν } x < 2 \end{cases}$$

Να βρείτε τις συναρτήσεις:

α. $f + g$ β. f/g γ. $g + h$

61. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1}{x-1}$ και $g(x) = \frac{x+2}{x^2-1}$.

Να ορίσετε τις συναρτήσεις $g-f$, f/g , $1/f$.

62. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{1+\sqrt{x-1}}{1-\sqrt{x-1}}$ και $g(x) = \frac{x-2\sqrt{x-1}}{2-x}$.

Να ορίσετε τις συναρτήσεις $f+g$ και $f \cdot g$.

63. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}}$ και $g(x) = \sqrt{x} - \frac{1}{\sqrt{x}}$. Να βρείτε τις

συναρτήσεις $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$, f/g .

64. Να εξετάσετε σε ποιες από τις παρακάτω περιπτώσεις είναι $f=g$. Στις περιπτώσεις που είναι $f \neq g$ να προσδιορίσετε το ευρύτερο δυνατό υποσύνολο

του $\mathbb{R}$ στο οποίο ισχύει $f(x) = g(x)$. α) $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+|x|}$ και $g(x) = 1 - \frac{1}{|x|}$

β) $f(x) = \sqrt{x(x-2)}$ και $g(x) = \sqrt{x}\sqrt{x-2}$

65. Να βρείτε τις συναρτήσεις $f+g$, f/g και $f \cdot g$ όταν:

$$f(x) = 4 - \frac{1}{x} \quad \text{και} \quad g(x) = \frac{x+1}{2-x}$$

66. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

i) $f(-x) = -f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ii) $|x| \cdot f(x) \geq x + x^3 \sin x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Να βρείτε: α) το $f(0)$ και β) τον τύπο της f

67. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^{\frac{1}{\ln x}}$

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f

β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = e$, για κάθε x του πεδίου ορισμού της

γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f

68. Αν για μια συνάρτηση f ισχύει $2f(x) - 3f\left(\frac{1}{x}\right) = x^2$, $x \neq 0$, να βρείτε το $f(2)$.

69. Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει $f(x) = g(x) + x^2 - 4$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τη σχετική θέση των C_f και C_g .

70. Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει:

$$g(x) = f^2(x) - 2f(x) + x^2 + 3, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Να αποδείξετε ότι η C_g έχει κοινό σημείο με τον θετικό ημιάξονα Oy .

71. Έστω η συνάρτηση $f:A \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x) - f(x) - 1 = x(x-1)$, για κάθε $x \in A$. Να αποδείξετε ότι η C_f δεν έχει κοινό σημείο με τον άξονα $x'x$.

72. Να βρείτε τη συνάρτηση $f:\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει $f^2(x) = 4e^x(f(x) - e^x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

73. Να βρείτε τις συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για τις οποίες ισχύει $f^2(x) + g^2(x) + 1 = 2(\eta\mu x \cdot f(x) - \sigma\upsilon\nu x \cdot g(x))$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Σύνθεση Συναρτήσεων

74. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 + 1$ και $g(x) = \sqrt{x-2}$. Να προσδιορίσετε τις συναρτήσεις $g \circ f$ και $f \circ g$

75. Δίνεται η συνάρτηση f πεδίο ορισμού το διάστημα $[0,1]$. Ποιο είναι το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων: α) $f(x^2)$, β) $f(x-4)$, γ) $f(\ln x)$.

76. Να εκφράσετε συνάρτηση f ως σύνθεση δύο ή περισσότερων συναρτήσεων,

αν: i) $f(x) = \eta\mu(x^2 + 1)$ ii) $f(x) = 2\eta\mu^2 3x + 1$

iii) $f(x) = \ln(e^{2x} - 1)$ iv) $f(x) = \eta\mu^2 3x$

77. Να βρείτε συνάρτηση f τέτοια ώστε να ισχύει:

i) $(f \circ g)(x) = x^2 + 2x + 2$, αν $g(x) = x + 1$

ii) $(f \circ g)(x) = \sqrt{1+x^2}$, αν $g(x) = -x^2$

iii) $(g \circ f)(x) = |\sigma\upsilon\nu x|$, αν $g(x) = \sqrt{1-x^2}$

78. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \frac{\alpha x + \beta}{x - \alpha}$, με $\beta \neq -\alpha^2$ και

$g(x) = x - 2\sqrt{x} + 1$. Να αποδείξετε ότι: α) $f(f(x)) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R} - \{\alpha\}$

και β) $g(g(x)) = x$, για κάθε $x \in [0, 1]$

79. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$f(x-3) - 2f(1-x) = x^2 - 2x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τη συνάρτηση f .

80. Δίνονται οι συναρτήσεις: $f(x) = x + 1$ και $g(x) = \alpha x + 2$. Για ποια τιμή του

$\alpha \in \mathbb{R}$ ισχύει $f \circ g = g \circ f$.

81. Οι πολιοδρόμοι μιας πόλης εκτιμούν ότι, όταν ο πληθυσμός P της πόλης είναι

x εκατοντάδες χιλιάδες άτομα, θα υπάρχουν στην πόλη $N = 10\sqrt{2(x^2 + x)}$

χιλιάδες αυτοκίνητα. Έρευνες δείχνουν ότι σε t έτη από σήμερα ο πληθυσμός

της πόλης θα είναι $\sqrt{t} + 4$ εκατοντάδες χιλιάδες άτομα.

i) Να εκφράσετε τον αριθμό N των αυτοκινήτων της πόλης ως συνάρτηση

του t . ii) Πότε θα υπάρχουν στην πόλη 120 χιλιάδες αυτοκίνητα;

82. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$ και $g(x) = \sqrt{x - 3}$. Να ορίσετε τις

συναρτήσεις: α) $f \circ g$ β) $g \circ f$ γ) $f \circ f$

83. Δίνονται συναρτήσεις f και g για τις οποίες ισχύουν $(f \circ g)(x) = 2x - 1$ και

$g(x) = \frac{3 - 2x}{x + 1}$. Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $f(x)$.

84. Δίνονται συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύουν:

$(f \circ g)(x) = 3x^2 - 6x + 10$ και $f(x) = 3x + 1$

Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $g(x)$.

85. Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = e^x - x$ και $g(x) = \frac{3x}{x-2}$. Να βρείτε τις

συναρτήσεις: α. $f \circ g$ β. $g \circ g$

86. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, για την οποία ισχύει $f(\ln x) = 3x + 2 \ln x - 1$ για κάθε $x > 0$. Να βρείτε τη συνάρτηση f .

87. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, για την οποία ισχύει $f^3(x) + f(x) - x + 1 = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. α) Να βρείτε τις ρίζες και το πρόσημο της f . β) Αν θεωρήσουμε γνωστό ότι το σύνολο τιμών της f είναι το $\mathbb{R}$, να δείξετε ότι η εξίσωση $e^{f(x)} - 2019 = 0$ έχει μία τουλάχιστον, λύση.

88. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνάρτηση, για την οποία ισχύει $f(x-3) - 2f(1-x) = x^2 - 2x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (1). Να βρείτε τη συνάρτηση f .

89. Αν $f(x) = 1 + \ln x$ και $g(x) = \begin{cases} x+2, & \alpha\nu x \leq 1 \\ 1-x^2, & \alpha\nu x > 1 \end{cases}$, να βρείτε την gof .

Μονοτονία Συνάρτησης

90. Να μελετήσετε ως προς τη μονοτονία τις συναρτήσεις:

α) $f(x) = 3 - \sqrt{6-2x}$

β) $f(x) = \frac{4}{x} - \ln x$

91. Να μελετήσετε ως προς την μονοτονία τις επόμενες συναρτήσεις:

α) $f(x) = \begin{cases} x+1, & \alpha\nu x < 0 \\ x^2, & \alpha\nu x \geq 0 \end{cases}$

β) $f(x) = \begin{cases} 2-x^5, & \alpha\nu x < 0 \\ 1-\sqrt{x}, & \alpha\nu x \geq 0 \end{cases}$

$$\gamma) f(x) = \begin{cases} e^x - x^2, & \alpha\nu \ x \leq -1 \\ 3 - \ln(x+1), & \alpha\nu \ x > -1 \end{cases}$$

92. Να λύσετε την εξίσωση $x^3 = 1 - \ln x$.

93. Να λύσετε την ανίσωση $9 - x^3 < e^{x-2}$.

94. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να λύσετε την ανίσωση: $\frac{1}{x^2+5} - \frac{1}{2x^2+1} < \ln \frac{x^2+5}{2x^2+1}$

95. Να αποδείξετε ότι:

i. Αν μία συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ , τότε η συνάρτηση $-f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ .

ii. Αν δύο συναρτήσεις f, g είναι γνησίως αύξουσες σε ένα διάστημα Δ , τότε η συνάρτηση $f+g$ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

iii. Αν δύο συναρτήσεις f, g είναι γνησίως αύξουσες σε ένα διάστημα Δ και ισχύει $f(x) \geq 0$ και $g(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \Delta$ τότε η συνάρτηση $f \cdot g$ είναι γνησίως αύξουσα στο Δ .

iv. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$ και μία συνάρτηση g γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$ να δείξετε ότι η $g \circ f$ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

96. Δίνονται οι γνησίως αύξουσες συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) > 0$ και $g(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι η f/g είναι γνησίως μονότονη

β) Να λύσετε την ανίσωση $f(x^2) \cdot g(x) - f(x) \cdot g(x^2) > 0$.

97. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $(1, +\infty)$. Αν ισχύει

$$f^3(x) - 3f(x) - x = 0 \text{ να εξετάσετε την } f \text{ ως προς τη μονοτονία της και}$$

ύστερα να λύσετε την ανίσωση $f(f(x)) > 2$.

98. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι γνησίως αύξουσες και ποιες γνησίως φθίνουσες

i) $f(x) = \sqrt{1-x}$ ii) $f(x) = 2\ln(x-2) - 1$

iii) $f(x) = 3e^{1-x} + 1$ iv) $f(x) = (x-1)^2 - 1, \quad x \leq 1$.

Ακρότατα Συνάρτησης

99. Να βρείτε τα ακρότατα των παρακάτω συναρτήσεων:

α. $f(x) = -x^2 + 2x - 5$ β. $f(x) = e^{x-1} - 2, \quad x \in [1, 2]$

100. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (e^x - 1)^2 \cdot (x-1)^4$. Να βρείτε τις θέσεις ελαχίστων της f .

101. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια περιττή συνάρτηση, για την οποία ισχύει:

$$(x^2 + 1)f(x) \leq 2x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Να βρείτε τη συνάρτηση } f.$$

102. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, για την οποία ισχύει $f(x+y) = f(x) + f(y)$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Να εξετάσετε αν η f είναι άρτια ή περιττή.

103. α) Να βρείτε το μέγιστο της συνάρτησης: $f(x) = 3 - \sqrt{x-4}$

β) Να βρείτε το ελάχιστο της συνάρτησης: $f(x) = \ln(x^2 - 4x + 5)$

Συνάρτηση ‘1-1’

104. Να βρείτε ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι ‘1-1’ και για καθεμία

από αυτές να βρείτε την αντίστροφη της i) $f(x) = 3x-2$ ii) $f(x) = x^2+1$

iii) $f(x) = (x-1)(x-2)+1$ iv) $f(x) = \sqrt[3]{1-x}$ v) $f(x) = \ln(1-x)$

vi) $f(x) = e^{-x} + 1$ vii) $f(x) = |x-1|$.

105. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$f(f(x)) - f(x) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει η αντίστροφη

της f . Να βρείτε το $f(0)$ και να λύσετε την εξίσωση $f(x^3 + x) = 0$.

106. Έστω συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f(f(x)) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και

$g(x) = x + f(x)$ μια ‘1-1’ συνάρτηση. Να βρείτε την f .

107. Έστω f μία γνησίως μονότονη συνάρτηση με πεδίο ορισμού και σύνολο

τιμών το $\mathbb{R}$. Αν η γραφική της παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(5,7)$

και $B(3,1)$ να λύσετε την ανίσωση $f(2 + f^{-1}(x+1)) < 7$.

108. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = \frac{2x-3}{x+1}$ είναι 1-1.

109. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x) = e^{1-x} - x^3$ είναι 1-1.

110. Να λύσετε την εξίσωση $5^x - 3 = \sqrt{5-x}$.

111. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^{2019} + \ln x$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι 1-1.

β) Να λύσετε την εξίσωση: $(2|x|+1)^{2019} - (|x|+3)^{2019} = \ln \frac{|x|+3}{2|x|+1}$

112. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$(f \circ f)(x) - f(x) = 2x - 4 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι $1-1$ β) Να βρείτε το $f(2)$

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(4 - f(x^2 + x)) - 2 = 0$.

113. Να βρείτε, ποιες από τις παρακάτω συναρτήσεις είναι $1-1$.

α) $f(x) = \frac{x-1}{x-2}$ β) $f(x) = 2x + e^x - 1$ γ) $f(x) = x^2 - 1$

114. Έστω η συνάρτηση $f(x) = e^{-x} - x - 1$.

α. Να δείξετε ότι η f είναι $1-1$.

β. Να λύσετε την εξίσωση $e^{-x} = x + 1$.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $f((x+1)e^x - 1) = 0$.

δ. Αν $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ και $e^{-\lambda} - e^{-\mu} = \lambda - \mu$, να δείξετε ότι $\lambda = \mu$.

ε. Να λύσετε την εξίσωση $e^{-2x+1} - e^{-x} = x - 1$.

115. Έστω $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις, για τις οποίες ισχύουν:

- $f(x) = g(x) - e^x + 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $e^{f(x)} + f(x) - 1 = 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Να βρείτε τη συνάρτηση g .

Αντίστροφη Συνάρτηση

116. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3 + e^{x-2}$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

β) Να ορίσετε τη συνάρτηση f^{-1} .

117. Δίνεται η συνάρτηση $f: [-3, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2 + 6x + 7$.

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη.

β) Να ορίσετε την f^{-1} .

118. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, η οποία έχει σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ και ικανοποιεί

τη σχέση: $f^3(x) + 3f(x) + x - 2 = 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

α) Να αποδείξετε ότι η f είναι $1-1$.

β) Να βρείτε την f^{-1} .

119. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = -x^3 - 2x + 14$. α) Να αποδείξετε ότι η f είναι

αντιστρέψιμη. β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της

f^{-1} με την ευθεία $y=x$.

120. Δίνεται η γνησίως μονότονη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική

παράσταση διέρχεται από τα σημεία $A(3,4)$ και $B(6,-2)$. α) Να βρείτε το είδος

της μονοτονίας της f και να αποδείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη. β) Να

λύσετε την εξίσωση $f(-3 + f^{-1}(|x| - 5)) = 4$ γ) Να λύσετε την ανίσωση

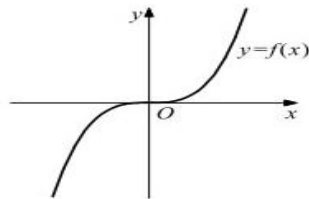
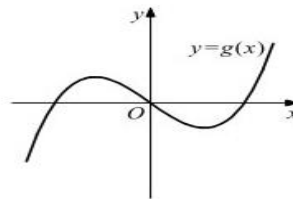
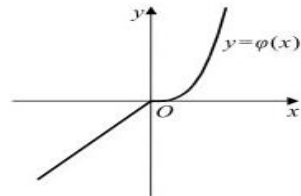
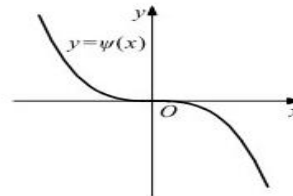
$f^{-1}(f(x^2 + 2) + 6) < 3$.

121. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x - 1$.

α. Να δείξετε ότι η f είναι $1-1$. β. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

γ. Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και στη συνέχεια, να βρείτε τη συνάρτηση f^{-1} .

122. Δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , g , φ και ψ .



Να βρείτε ποιες από τις συναρτήσεις f , g , φ , ψ έχουν αντίστροφη και για καθεμία απ' αυτές να χαράξετε τη γραφική παράσταση της αντίστροφής της.

123. Έστω η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με σύνολο τιμών στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$e^{f(x)} + 2f^3(x) - x + 1 = 0, \quad x \in \mathbb{R}$$

i. Να αποδείξετε ότι η f είναι $1-1$.

ii. Να βρείτε την αντίστροφη της f .

124. Να αποδείξετε ότι αν μια αντιστρέψιμη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με σύνολο τιμών το $\mathbb{R}$ είναι περιττή, τότε και η αντίστροφη της f^{-1} είναι περιττή.

Όριο συνάρτησης στο $x \in \mathbb{R}$

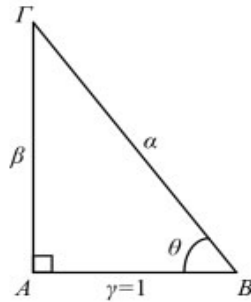
125. Αν $\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) + 2g(x)) = 1$ και $\lim_{x \rightarrow 2} (2f(x) - g(x)) = -3$, να βρείτε τα

$$\lim_{x \rightarrow 2} f(x) \text{ και } \lim_{x \rightarrow 2} g(x)$$

126. Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο με $\gamma = 1$. Να υπολογίσετε τα όρια:

i) $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\alpha - \beta)$

ii) $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\alpha^2 - \beta^2)$ iii) $\lim_{\theta \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\beta}{\alpha}$



127. Αν για τη συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύουν $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = l \in \mathbb{R}$ και

$$f^3(x) + f^2(x) \cdot \eta\mu x + x^3 f(x) = 2x^2 \eta\mu x, \quad x \in \mathbb{R}, \text{ να βρείτε: i) το } \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

ii) το l

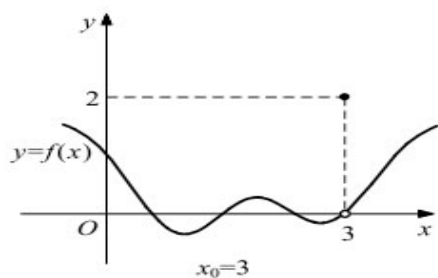
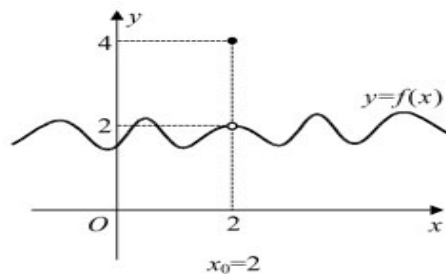
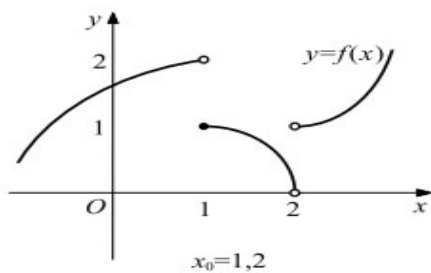
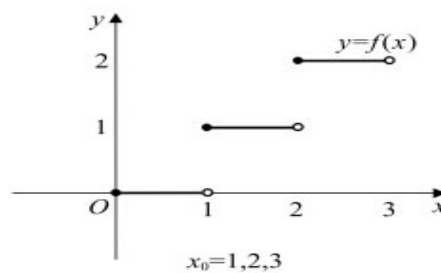
128. Αν για x κοντά στο 1 ισχύει $3f(x) + g(x) < 0 \leq g(x)$ και

$$\lim_{x \rightarrow 1} (g(x) - 3f(x)) = 0, \text{ να αποδείξετε ότι } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} g(x) = 0.$$

129. Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $f(x) = f(x-1)$ και $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$, να βρείτε το

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x).$$

130. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ και το $f(x_0)$, εφόσον υπάρχουν, όταν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι:



131. Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f και με τη βοήθεια αυτής να βρείτε, εφόσον υπάρχει, το $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, όταν:

$$\alpha) f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{x - 2}, \quad x_0 = 2 \qquad \beta) f(x) = \begin{cases} x, & x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & x > 1 \end{cases}, \quad x_0 = 1$$

$$\gamma) f(x) = \begin{cases} x^2, & x \leq 1 \\ -x + 1, & x > 1 \end{cases}, \quad x_0 = 1 \qquad \delta) f(x) = x + \frac{\sqrt{x^2}}{x}, \quad x_0 = 0.$$

132. Ομοίως όταν:

$$\alpha) f(x) = \frac{x^3 + 3x^2 - x - 3}{x^2 - 1}, \quad x_0 = 1 \quad \text{ή} \quad x_0 = -1$$

$$\beta) f(x) = \frac{(x+1)\sqrt{9x^2 - 6x + 1}}{3x - 1}, \quad x_0 = \frac{1}{3}.$$

133. Δίνεται η συνάρτηση f που είναι ορισμένη στο $[-2, +\infty)$ και έχει γραφική παράσταση που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Να εξετάσετε ποιοι από τους επόμενους ισχυρισμούς είναι αληθείς.

i) $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 2$

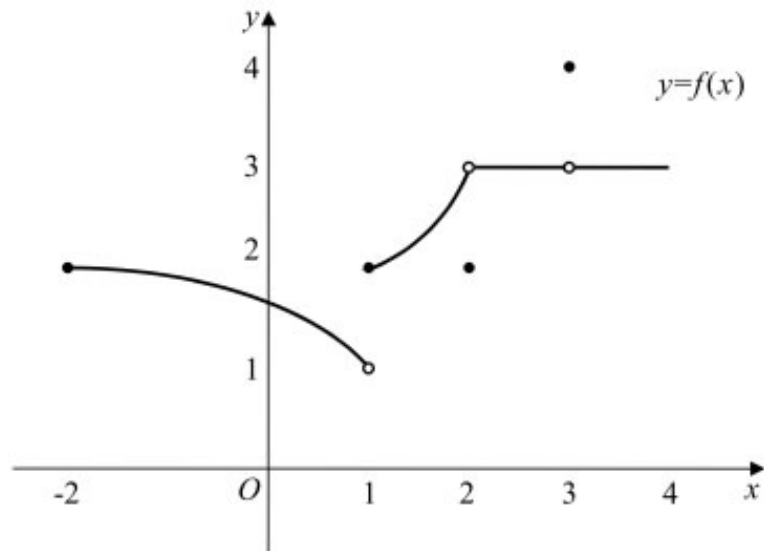
ii) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1$

iii) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$

iv) $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 3$

v) $\lim_{x \rightarrow 3} f(x) = 4$

vi) $\lim_{x \rightarrow 4} f(x) = 3$



134. Δίνεται μια συνάρτηση f ορισμένη στο $(\alpha, x_0) \cup (x_0, \beta)$, με $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lambda^2 - 6$

και $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lambda$. Να βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες υπάρχει το

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x).$$

135. Να βρείτε τα όρια:

i) $\lim_{x \rightarrow 0} (x^5 - 4x^3 - 2x + 5)$

ii) $\lim_{x \rightarrow 1} (x^{10} - 2x^3 + x - 1)$

iii) $\lim_{x \rightarrow -1} (x^8 + 2x + 3)^{20}$

iv) $\lim_{x \rightarrow 3} [(x-5)^3 |x^2 - 2x - 3|]$

v) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^4 + 2x - 5}{x + 3}$

vi) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x^2 - 3x| + |x - 2|}{x^2 + x + 1}$

$$\text{vii)} \lim_{x \rightarrow 1} \sqrt[3]{(x+2)^2}$$

$$\text{viii)} \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + x + 2} - 2}{x^2 + 4x + 3}.$$

136. Έστω μια συνάρτηση f με $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} g(x)$ αν:

$$\text{i)} g(x) = 3(f(x))^2 - 5 \quad \text{ii)} g(x) = \frac{|2f(x) - 11|}{(f(x))^2 + 1}$$

$$\text{iii)} g(x) = (f(x) + 2)(f(x) - 3).$$

137. Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις να εξετάσετε αν έχει νόημα η

αναζήτηση του ορίου $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 3} f(x), \text{ όπου } f(x) = \sqrt{25 - x^2}$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow -1} f(x), \text{ όπου } f(x) = \frac{x^{11} + 3x^{10} - 2}{x + 1}$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow 2} f(x), \text{ όπου } f(x) = \frac{x^2 - 4}{\sqrt{x} - 2}$$

$$\delta) \lim_{x \rightarrow 1} f(x), \text{ όπου } f(x) = \sqrt{x^2 + 2x - 3} + \sqrt{-x^2 - 4x + 5}$$

138. Αν ισχύει $\lim_{h \rightarrow 0} f(3+h) = 5$, να βρείτε τα όρια: $\alpha) \lim_{x \rightarrow 3} (f(x) - 5)$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 3} (f(x) + 2)$$

139. Να υπολογίσετε το όριο: $\lim_{x \rightarrow -2} (-3x^3 - 4x^2 + 5x + 6)$

140. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3 - 5x^2 + 4x - 6}{x^2 - 4x + 5}$.

141. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x+6} - x^3 + 5x - 7}{|2x+1| - 5}$$

$$\beta) \lim_{x \rightarrow 4} (\sqrt{-x^2 + 2x + 8} + \sqrt{x^2 - 5x + 4})$$

$$142. \text{ Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & \alpha\nu \ x < 0 \\ x^3, & \alpha\nu \ 0 \leq x \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & \alpha\nu \ x > 1 \end{cases}$$

α. Να κάνετε τη γραφική παράσταση της f.

β. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα όρια:

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) \quad \text{ii. } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \quad \text{iii. } \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

$$143. \text{ Να υπολογίσετε τα όρια: } \alpha. \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 3x}{x^2 - 9} \quad \beta. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 2x}{2x^2 - 5x + 3}$$

$$\gamma. \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^3 - 7x + 6}$$

$$144. \text{ Να βρείτε τα όρια: } \alpha. \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - 4}{\sqrt{x} - 2} \quad \beta. \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+5} - 2}{x^2 + x}$$

$$\gamma. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + 3} - 3x + 1}{x^2 - 1} \quad \delta. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2\sqrt{2x-1} - \sqrt{x+3}}{\sqrt{x} - 1}$$

$$145. \text{ Να υπολογίσετε το } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{x}{x-1} + \frac{x-2}{x^2 - x} \right).$$

$$146. \text{ Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - x - 2}{2x - 4}, & x \neq 2 \\ \frac{\alpha^2}{2} + \alpha, & x = 2 \end{cases} \quad \alpha. \text{ Να βρείτε το } \lim_{x \rightarrow 2} f(x)$$

β. Να βρείτε το α, ώστε $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$.

147. Έστω $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ μια συνάρτηση, για την οποία ισχύει

$$3x - 2 - x^2 \leq f(x) \leq x^2 - x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}, \text{ να βρείτε τα όρια:}$$

$$\alpha. \lim_{x \rightarrow 1} f(x) \quad \beta. \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1}$$

148. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 0} (\eta \mu x \cdot \sigma \upsilon \nu \frac{1}{x})$.

149. Να βρείτε τα όρια: $\alpha. \lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{x(\sigma \upsilon \nu x - 1)}{\eta \mu x} \cdot \eta \mu \frac{1}{x} \right] \quad \beta. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x^2 - \eta \mu x}{x + \sigma \upsilon \nu x - 1}$

$$\gamma. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\eta \mu^2 x}{\sqrt{x^2 + 1} - 1}$$

150. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{\eta \mu(x - 2)}{x^2 - 5x + 6} \quad \text{ii. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{3x + 1} - \sqrt[6]{3x + 1}}{\sqrt[3]{3x + 1} - \sqrt[6]{3x + 1}}$$

151. Αν ισχύει $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + \alpha x + \beta}{x^2 + 2x} = 3$, να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α

και β .

Μη πεπερασμένο όριο στο $x_0 \in \mathbb{R}$

152. Να βρείτε (αν υπάρχει) το όριο της f στο x_0 όταν:

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow 2} f(x) \quad \text{ii. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f^2(x) - 2f(x) + 5}{f^3(x) + 1}$$

153. Να βρείτε (αν υπάρχει) το όριο της f στο x_0 όταν: i) $f(x) = \frac{x + 5}{x^4 + 3x^2}$, $x_0 = 0$

$$\text{ii) } f(x) = \frac{2x - 3}{4(x - 1)^4}, x_0 = 1 \quad \text{iii) } f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{|x|}, x_0 = 0.$$

154. Να βρείτε (αν υπάρχει) το όριο της f στο x_0 , όταν: $f(x) = \frac{3}{1-x} - \frac{4}{1-x^2}$,

$$x_0=1$$

155. Να βρείτε (εφόσον υπάρχει) το $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{-9}{x\sqrt{x} - 2x - 4\sqrt{x} + 8}$.

156. Να αποδείξετε ότι:

i) Η συνάρτηση $f(x) = \varepsilon\varphi x$ δεν έχει όριο στο $\frac{\pi}{2}$.

ii) Η συνάρτηση $f(x) = \sigma\varphi x$ δεν έχει όριο στο 0.

157. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \frac{x^2 + 2x + \mu}{x}$. Να βρείτε τις τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$,

για τις οποίες υπάρχει στο $\mathbb{R}$ το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$.

158. Να βρείτε, αν υπάρχουν, τα παρακάτω όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} \quad \beta) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^3} \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{x^2 - 4x + 4} \quad \delta) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{1}{|x+3|}$$

$$\epsilon) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x - 1} \quad \sigma\tau) \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{x - 4}$$

159. Να υπολογίσετε, αν υπάρχουν, τα επόμενα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-5}{x^2 - 6x + 9} \quad \beta) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-6}{x^2 - x - 2}$$

160. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow 1^-} \left(\frac{2}{x-1} - \frac{x+10}{x^2 + 2x - 3} \right)$.

161. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow 0} [x^2 f(x)] = -3$

Να βρείτε τα όρια: α) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ β) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-2}{f(x)}$ γ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x-3}{f(x)\eta\mu^2 x}$

162. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 1} [(x^2 - 2x + 1) f(x)] = -3. \text{ Να βρείτε τα όρια:}$$

α) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ β) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2f^2(x) - 3f(x) - 5}{f^2(x) + f(x) - 4}$

γ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^3(x) - 2f(x) + 3}{f^2(x) - 3f(x) - 1}$ δ) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x) + 4}{f^3(x) - 2f^2(x) + 1}$

163. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = +\infty$. Να

βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{|3 - xf(x)| - |2f(x) - 3|}$

164. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι

$$(x^2 - 4x + 4)f(x) \leq x - 5 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Να βρείτε το } \lim_{x \rightarrow 2} f(x).$$

165. Να βρείτε εφόσον υπάρχουν, τα όρια :

i. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x| - 3}{|x - 2|}$ ii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x + |x|}{4 - |x + 3|}$ iii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 1}{x|x|}$

166. Για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 - \lambda}{|x - 2|}$.

167. Έστω $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ δύο συναρτήσεις, για τις οποίες ισχύουν:

$$\lim_{x \rightarrow 0} |x| f(x) = 1 \text{ και } \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x - 1)g(x) = 3. \text{ Να βρείτε τα όρια:}$$

α. $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ β. $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$ γ. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - g(x) + 2f(x)g(x)}{f^2(x) + 3g(x) - f^2(x)g(x)}$

168. Αν για μία συνάρτηση f ισχύει $|x-2| f(x) \geq x-1$, για κάθε $x \neq 2$. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$.

Όριο συνάρτησης στο άπειρο

169. Να βρείτε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2-3x+2})$

ii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x-1-\sqrt{4x^2-4x+3})$

iii. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-\sqrt{x^2+1}}{x-\sqrt{x^2-1}}$

iv. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x^2-5x|+x}{x^2-3x+2}$

v. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}+5-x}{x+\sqrt{4+3x^2}}$

vi. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2-x \cdot \eta \mu x + 1}{x\sqrt{x^2-4}}$

170. Έστω η συνάρτηση $f: (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x \cdot f(x) - 2x + 3}{x + 2} = 1. \text{ Να βρείτε τα όρια: i) } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 f(x) - x^2 + 1}{x \cdot f(x) + 3}$

171. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\mu-2)x^3 + (\mu+1)x + 1}{\mu x^2 + 1}, \text{ αν } \mu \in \mathbb{R}$

β) $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 1} - \lambda x - \mu), \text{ αν } \lambda, \mu \in \mathbb{R}$

γ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\alpha^x}{\alpha^x + 1}, \text{ αν } \alpha > 0$

δ) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x + \eta \mu x) - 2 \ln x]$

172. Αν $f(x) = \frac{x^2+1}{x+1} - \alpha x + \beta$ να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες

$$\text{ισχύει } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

173. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x + 5^x + 3^{2x}}{4^{\frac{x+1}{2}} + 5^x}$

174. Να βρείτε τα όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (-10x^3 + 2x - 5) \quad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (5x^3 - 2x + 1) \quad \text{iii) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{x^3 + 8}$$

$$\text{iv) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^4 - 5x^3 + 2x - 1}{x^3 - 3x + 2} \quad \text{v) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 + x - 1}{4x^3 - x^2 + 2} \quad \text{vi) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + 2}{x^{10} + x + 3}$$

$$\text{vii) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{x^2 + 1} - \frac{2}{x + 2} \right) \quad \text{viii) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{x^2 + 5}{x} - \frac{x^2 + 3}{x + 2} \right)$$

175. Να βρείτε τα όρια: i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{4x^2 - 2x + 3}$ ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 10x + 9}$

$$\text{iii) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{(x+a)(x+b)} - x), \alpha \neq b$$

176. Να βρείτε τα όρια:

$$\text{i) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x} \quad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x) \quad \text{iii) } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x}$$

$$\text{iv) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + x) \quad \text{v) } \lim_{x \rightarrow +\infty} (x\sqrt{x^2 + 2x + 2} - x^2)$$

177. Για τις διάφορες πραγματικές τιμές του μ , να υπολογίσετε τα παρακάτω

$$\text{όρια: i) } \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} + \mu x) \quad \text{ii) } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\mu - 1)x^3 + 2x^2 + 3}{\mu x^2 - 5x + 6}$$

178. Να προσδιορίσετε το $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 5x + 10} - \lambda x)$ να υπάρχει στο $\mathbb{R}$.

179. Να βρείτε τα όρια: i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{|x^2 - x|}{x - 1}$ ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x^3 - x + 1}{3x^3 + x^2 + 1}$ iii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - x + 2}{2x^3 + x + 1}$
iv) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x - 1} - \frac{2x^2}{x + 1} \right)$

180. Να βρείτε τις τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$, ώστε το $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\mu - 1)x^3 + \mu x^2 - 2}{(\mu - 2)x^2 + 3x + 1}$ να είναι πραγματικός αριθμός.

181. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} (2x - |x^3 - x - 1|)$.

182. Να βρείτε τα όρια: i. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x - 1)(x^2 - 3)}{3x^2 + 1 - 2x^4 + x}$ ii.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^4 + 2}{x^2 - 1} - \frac{3x^2}{x - 1} \right)$$

$$\text{iii. } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x - 1)^{15} (x - 2)^{17}}{(x^2 - x + 1)^{14}}$$

183. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{|3x^5 - x + 1| - 1}{|1 + x - x^5| + x^5 - 3}$. Να βρείτε τα όρια:

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \quad \text{ii. } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$$

184. Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow -\infty} [(\lambda^2 - 3\lambda)x^4 + 4\lambda x^3 + (\lambda - 5)x^2 + 7x - 6]$

για τις διάφορες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$.

185. Να βρείτε το όριο: $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{|x^4 + 6x^3 - 5x + 6| - x^4}{|4x^3 + 2x^2 - 3x| + x^3}$

186. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - 3x + 5} + x) \quad \beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 - x + 2} - 3x)$$

$$\gamma) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{9x^2 - 2x + 1} - \sqrt{25x^2 + x - 3}) \quad \delta) \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{4x^2 - 5x + 2} + 2x)$$

187. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$2x^3 - 3x^2 \leq (x^3 - 5x + 2)f(x) \leq 2x^3 + 3x^2 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}. \text{ Να βρείτε τα όρια:}$$

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \quad \beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$$

188. Να βρείτε τα όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(x \cdot \eta\mu \frac{1}{x} \right) \quad \beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \cdot \eta\mu x}{x^2 + 1} \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x - \eta\mu x}{x + \sigma\upsilon\nu x}$$

189. Δίνεται συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x) - 6x^2 - 3x + 5}{x^2 - 5x + 4} = 4. \text{ Να βρείτε τα όρια: } \alpha) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) \quad \beta) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x^2}$$

190. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3^x + 5^x - 6}{2^x + 4} \quad \beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x + 2^{x+1}}{3^{x+2} + 2^x} \quad \gamma) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5^{x+1} + 2^{x+3}}{5^x - 2^{x+1}}$$

191. Να βρείτε τα παρακάτω όρια:

$$\alpha) \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(x^3 - 5x) - 2\ln(x + 2)] \quad \beta) \lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(2^x + 1) - x]$$

192. Να βρείτε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2^{x+1} - a^x}{2^x + a^{x+1}}$ για τις διάφορες τιμές του $a \in \mathbb{R}$, με $a > 0$.

193. Να υπολογίσετε τα όρια: α) $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{-x^2+3}{x+5}}$ β) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{6 \ln^2 x - 5 \ln x + 4}{3 \ln^2 x + 2 \ln x - 1}$

Συνέχεια Συνάρτησης

194. Αν $f(x) = \begin{cases} \alpha^2 x^2 + \beta x - 12, & x < 1 \\ 5, & x = 1 \\ \alpha x + \beta, & x > 1 \end{cases}$. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις

οποίες η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$.

195. i) Έστω μια συνάρτηση f η οποία είναι συνεχής στο $x_0 = 0$. Να βρείτε το

$f(0)$, αν για κάθε $x \in \mathbb{R}^*$ ισχύει $x \cdot f(x) = \sin x - 1$.

ii) Ομοίως, να βρείτε το $g(0)$ για τη συνάρτηση g που είναι συνεχής στο

$x_0 = 0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει $|x \cdot g(x) - \eta \mu x| \leq x^2$.

196. Έστω $g(x) = \begin{cases} \frac{|x| \cdot \sqrt{|x|}}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$. Αν $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση τέτοια

ώστε $|f(x) - 2| \leq |g(x)|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής

στο 0.

197. Δίνεται η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει $2f(x) = x + \eta \mu f(x)$,

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι:

i) $|f(x)| \leq |x|$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ii) Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$.

198. Αν f συνεχής στο 0 και $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \sqrt{9+x}}{x} = 2$, να αποδείξετε ότι η γραφική

παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $A(0,3)$ και να βρείτε το

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x}.$$

199. Έστω συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ τέτοια ώστε να ισχύει $|f(x) - f(y)| \leq \kappa \cdot |x - y|$

, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ όπου $\kappa > 0$. Να αποδείξετε ότι: α) η f είναι συνεχής

β) αν $\kappa \in (0,1)$ η εξίσωση $f(x) = x$ έχει μία το πολύ ρίζα στο $\mathbb{R}$.

200. Να βρείτε τις τιμές $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \alpha x + \beta, & \text{αν } x < 2 \\ 5, & \text{αν } x = 2 \\ x^3 + \alpha x^2 + (2\beta - 9)x - 1, & \text{αν } x > 2 \end{cases} \quad \text{να είναι συνεχής.}$$

201. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει:

$$(x-2)f(x) = \sqrt{x+7} - 3 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}. \quad \text{Να βρείτε την τιμή } f(2).$$

202. Δίνεται συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση

διέρχεται από το σημείο $M(1,2)$. Αν επιπλέον ισχύει:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)f(x) + \sqrt{x+3} - 2}{x^2 + 2x - 3} = \frac{9}{16} \quad \text{να αποδείξετε ότι η } f \text{ είναι συνεχής}$$

στο 1.

203. Να βρείτε το $\alpha, \alpha \geq 0$, ώστε να υπάρχει το $\lim_{x \rightarrow +\infty} [\ln(\alpha x^2 + 2x + 1) - \ln(x-1)]$

$x > 1$. Και να είναι πραγματικός αριθμός.

204. Για τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει $|xf(x) - \eta\mu x| \leq \eta\mu^2 x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Αν η f είναι συνεχής, να βρείτε την τιμή $f(0)$.

205. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ και ισχύει $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - 2x}{x^2 - 1} = l \in \mathbb{R}$

να βρείτε την τιμή της f στο 1.

206. Αν $x^3 f(x) \leq (\sqrt{x^2 + 4} - 2)\eta\mu 4x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η f είναι συνεχής στο

$x_0 = 0$, να υπολογίσετε την τιμή της f στο $x_0 = 0$.

207. Έστω f μία συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)(\sqrt{x} - 1)}{x - 1} = +\infty$. Να εξετάσετε αν η f μπορεί να είναι συνεχής στο

$x_0 = 1$.

208. Η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής στο $x_0 = 0$ και ισχύει:

$x^2 f(x) = \sqrt{1 + \eta\mu^2 x} - 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε τον τύπο της f .

Θεώρημα Bolzano

209. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση: $\frac{x^4 + 1}{x - 1} + \frac{x^6 + 1}{x - 2} = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα

στο $(1, 2)$.

210. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ τέτοιο ώστε $\sin x_0 = x_0^2$.

211. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^3 + 3x = \alpha$ έχει μοναδική ρίζα στο $[0, 1]$, για

κάθε $\alpha \in [0, 4]$.

212. Δίνεται η συνάρτηση:
$$f(x) = \begin{cases} \frac{\eta\mu x + x^2 + 3x}{x}, & \alpha\nu \quad -\pi \leq x < 0 \\ e^x - x + 3, & \alpha\nu \quad 0 \leq x \leq 1 \end{cases}.$$
 Να

εξετάσετε αν η f ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του θεωρήματος Bolzano στο διάστημα $[-\pi, 1]$.

213. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $3x + \ln x^4 = x^2 + 4$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο διάστημα $(1, e)$.

214. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\frac{x^2 + 1}{x - 1} + \frac{e^x + 1}{x - 2} = 0$ έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 2)$.

215. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(\alpha, -1)$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\alpha, \beta)$, ώστε $x_0((f(x_0) - 1) = \beta f(x_0) - \alpha$.

216. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι $f(-1) = 2\kappa$ και $f(2) = -\lambda$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in [-1, 2]$, ώστε $\kappa - f(\xi) = \lambda\xi$.

217. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x = 3 - 2x$ έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$.

218. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $(3 - x) \ln x = x^3 - 5x^2 + 5x$ έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα $(1, 4)$.

219. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\ln x = x^2 - 4x + 2$ έχει μία τουλάχιστον λύση στο διάστημα $(0, 1)$.

220. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (0, 1)$, ώστε $e^{x_0} + \ln(x_0 + 1) = 2$.

221. Να δείξετε ότι η εξίσωση $x \exp x = 1$ έχει δύο , τουλάχιστον, ρίζες στο διάστημα $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

222. Να δείξετε ότι η εξίσωση $\ln x = \frac{1}{x-1}$ έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα $(0,1)$.

223. Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $0 \leq f(x) \leq \ln 2$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in [0,1]$ τέτοιο ώστε $f(\sin(\pi x_0)) = \ln(x_0 + 1)$.

224. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ με $-1 < f(x) < 0$, για κάθε $x_0 \in [0,1]$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα , τουλάχιστον, $x_0 \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $f^2(x_0) = 2f(x_0) + 3x_0$.

225. Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, για την οποία ισχύουν $f(2-x) = f(x)$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)-4}{x-3} = 7$ και η f είναι συνεχής στο 3. Να αποδείξετε, ότι η f είναι συνεχής και στο -1 .

Συνέπειες Θεωρήματος Bolzano - Θεώρημα ενδιάμεσων τιμών

226. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2^x$. Να δείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (10,11)$, τέτοιο ώστε $f(\xi) = 2019$.

227. Έστω η συνεχής και γνησίως φθίνουσα συνάρτηση $f : [1,3] \rightarrow \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένας, ακριβώς, $x_0 \in (1,3)$ τέτοιος, ώστε:

$$f(x_0) = \frac{f(1) + f(2) + f(3)}{3}.$$

228. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^5 + 5x^3 - x + 10$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει

$$\xi \in (1, 2) \text{ τέτοιο, ώστε } f(\xi) = 50.$$

229. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση $f(x) = \sin 2x + 5\eta \mu 2x - 2$ παίρνει την τιμή

$$-e \text{ στο διάστημα } \left(0, \frac{\pi}{2}\right).$$

230. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο $[0, 4]$. Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $[0, 4]$ να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός αριθμός $x_0 \in (0, 4)$ τέτοιος

$$\text{ώστε: } f(x_0) = \frac{f(1) + 2f(2) + 3f(3)}{6}.$$

231. Έστω $f: \square \rightarrow \square$ συνεχής συνάρτηση με $f(4) = 3$ και $f(x)f(f(x)) = 1$ για κάθε $x \in \square$.

i) Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\gamma \in \square$, τέτοιο ώστε $f(\gamma) = 2$.

ii) Να βρείτε την τιμή της f στο 2.

iii) Να αποδείξετε ότι η f δεν είναι γνησίως μονότονη.

232. Να αποδείξετε ότι αν η συνάρτηση $f: \square \rightarrow \square$ είναι συνεχής και «1-1», τότε η f είναι γνησίως μονότονη.

Θεώρημα Μέγιστης – Ελάχιστης τιμής

233. Έστω f μία συνάρτηση συνεχής και μη σταθερή στο $[0, 4]$. Να αποδείξετε ότι

$$\text{υπάρχει ένα τουλάχιστον } \xi \in [0, 4] \text{ τέτοιο ώστε: } f(\xi) = \frac{f(1) + 3f(2) + 5f(3)}{9}$$

234. Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f: [1, 5] \rightarrow \square$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα

$$\text{τουλάχιστον } x_0 \in [1, 5] \text{ τέτοιο ώστε: } f(x_0) = \frac{3f(2) + 5f(3) + 7f(4)}{15}.$$

235. Έστω μία συνεχής συνάρτηση $f : [2, 4] \rightarrow \mathbb{R}$. Να δείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον, $x_0 \in [2, 4]$ τέτοιο ώστε να ισχύει:

$$f(x_0) = \frac{f(2) + 2f(3) + 3f(4)}{6}.$$

236. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (x-1)^4 \cdot (x-3)^2$, $x \in \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι η f έχει δύο θέσεις x_1, x_2 ($x_1 < x_2$) ελαχίστων και στη συνέχεια, ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον $x_0 \in (x_1, x_2)$, τέτοιο ώστε η f να παρουσιάζει μέγιστο στο $[x_1, x_2]$.

Επέκταση Bolzano – Σύνολο τιμών – Πρόσημο της f

237. Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty. \quad \text{Να αποδείξετε ότι η εξίσωση } f(x) + \ln x = 1 \text{ έχει μία,}$$

τουλάχιστον, θετική ρίζα.

238. Δίνεται συνεχής συνάρτηση f στο $[-2, 2]$. Αν ισχύει ότι

$$x^2 + f^3(x) + 19(f(x))^{17} = 4 \text{ για κάθε } x \in [-2, 2]:$$

α) Να δείξετε ότι η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(-2, 2)$

β) Να βρείτε το πρόσημο της f στο $(-2, 2)$

239. Να δείξετε ότι η εξίσωση $2x^\nu + x + \ln(\alpha x^2 + 1) = \alpha$, $\alpha > 0$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ έχει μία μόνο θετική ρίζα.

240. Έστω η συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο ώστε:

$$f(\xi) = \frac{f(\alpha) + f(\beta) + f\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)}{3}.$$

241. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 5 - \sqrt{x-1} - \ln x$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β) Να μελετήσετε την f ως προς την μονοτονία.

γ) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

242. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln x - \ln(2-x) - x^2$. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της f .

243. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $e^x + \ln x = 2019$ έχει μοναδική θετική ρίζα.

244. Να βρείτε το σύνολο τιμών των παρακάτω συναρτήσεων:

i) $f(x) = \sqrt{5-x} - \sqrt{x+4}$ ii) $g(x) = \frac{2}{x} + 3 - \sqrt{x}$

iii) $h(x) = xe^x - 1, \quad x \geq 0$ iv) $\varphi(x) = 1 - x^2 - \ln x, \quad x \in \Delta = (0, e]$

245. Να αποδείξετε ότι:

A. Η εξίσωση $xe^{x-1} + \ln x - 1 = 0$ έχει ακριβώς μια θετική ρίζα

B. Η εξίσωση $e^{-x} + \frac{1}{x-1} = \ln x$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο διάστημα $(0, 1)$

246. Έστω $f: \square \rightarrow \square$ μία συνεχής συνάρτηση.

α. Αν $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in \square$ και $f(2) = -3$, να βρείτε το

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{|f(x)| - 3}{f^2(x) + 3f(x)}.$$

β. Αν $f(1) = -2$ και $-1, 2$ διαδοχικές ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$, να

βρείτε το $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3 f(0) + 1}{x^2 + 2}$.

247. Να βρείτε το πρόσημο της συνάρτησης $f(x) = 2\eta\mu x - 1$, $x \in [0, \pi]$

248. Έστω $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ μία συνεχής συνάρτηση για την οποία ισχύει

$4x^2 + f^2(x) = 4$, για κάθε $x \in [-1, 1]$. Αν $f(0) = -2$, να βρείτε τον τύπο της f .

249. Να βρείτε τη συνεχή συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία για κάθε $x \in \mathbb{R}$

ισχύει $f(x)(e^x f(x) - 2) = e^{-x} x^2$ και $f(0) = 0$.

Επαναληπτικές ασκήσεις 1^{ου} κεφαλαίου

250. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\ln x}{1 - \ln x}$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

γ) Να δείξετε ότι η C_f βρίσκεται κάτω από τη γραφική παράσταση της f^{-1} στο διάστημα $(e, +\infty)$.

δ) Να υπολογίσετε τα όρια: i) $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ iii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f^{-1}(x)}{f(x)}$

251. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^3 + \sqrt{x}$.

α) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται.

β) Να υπολογίσετε τα όρια: i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{-1}(x)$ ii) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\eta\mu x}{f^{-1}(x)}$

252. Έστω συνεχής συνάρτηση $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$.

α) Αν $\lim_{x \rightarrow 0^+} (f^2(x) - 4f(x)) = -4$, να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2$.

β) Έστω ότι $f^2(x) - 4f(x) = x - 4$ για κάθε $x \geq 0$ και $f(1) = 1$.

i) Να δείξετε ότι $f(x) = 2 - \sqrt{x}$.

ii) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την f^{-1} .

iii. Να δείξετε ότι η εξίσωση $2f(x) = e^{2-f(x)} + 2$ έχει ακριβώς μία λύση.

253. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{e^x}{e^x - 1}$.

α) Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία.

β) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

γ) Έστω ότι $f(g(x)) = \frac{x}{x-1}$, $g(x) > 1$, $x > e$.

i. Να δείξετε ότι $g(x) = \ln x$.

ii. Να δείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g τέμνονται ακριβώς σε ένα σημείο.

254. Έστω περιττή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$.

α) Αν η f έχει ελάχιστο στο $x_1 = -1$, να δείξετε ότι έχει μέγιστο στο $x_2 = 1$.

β) Να δείξετε ότι η C_f διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

γ) Να δείξετε ότι $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

δ) Αν η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, -1)$, να δείξετε ότι είναι γνησίως φθίνουσα και στο $(1, +\infty)$.

ε) Αξιοποιώντας τις πληροφορίες της άσκησης, να σχεδιάσετε μια συνάρτηση f .

στ) Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x-1) - f(1-x))$

ζ) Αν η f είναι συνεχής στο $[0,1]$, να δείξετε ότι η εξίσωση $(x-1)f(x) + x^2 = 4x - 2$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$.

255. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \ln \frac{1-x}{1+x}$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

β) Να δείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

γ) Να δείξετε ότι η f είναι περιττή.

δ) Να υπολογίσετε τα όρια $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x)$ και $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$.

ε) Να δείξετε ότι η εξίσωση $(x+1)e^{f(x)} = x^3 - 6x^2 + x + 3$ έχει τουλάχιστον δύο λύσεις στο διάστημα $(-1,1)$.

256. Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $\mathbb{R}$ της οποίας η γραφική παράσταση τέμνει τους άξονες στα σημεία $A(-2,0)$, $B(4,0)$, $\Gamma(0,3)$ και μόνο σ' αυτά.

α) Να δείξετε ότι $f(2) > 0$.

β) Να δείξετε ότι η εξίσωση $x^5 f(5) f(6) + 3x - 2 = 0$ έχει τουλάχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$.

γ) Έστω ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[4, +\infty)$.

i. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(10)x^3 - 4x^2 + f(1)}{f(3)x^2 - 5x - 2}$

ii. Να δείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $x_0 \in (6,8)$ τέτοιο, ώστε $3f(x_0) = f(6) + f(7) + f(8)$.

257. Έστω περιττή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ για την οποία ισχύει ότι

$$\lim_{x \rightarrow 2} (f(x) + \eta \mu \pi x - 1) = 9. \quad \alpha) \text{ Να δείξετε ότι } \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -10.$$

β) Έστω ότι η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

i. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (-2,2)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = \pi$.

ii. Να δείξετε ότι υπάρχει $x_1 \in [-1,1]$ τέτοιο, ώστε $f(x_1) = \frac{f(-1) + f(1)}{2}$.

γ) Να βρείτε την f αν ισχύει ότι $x^2 f(x) \geq x^5 + x^3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

258. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα.

β) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .

γ) Να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και να βρείτε την αντίστροφή της.

δ) Να λύσετε την εξίσωση $x + \sqrt{x^2 + 1} + \sqrt{(x + \sqrt{x^2 + 1})^2 + 1} = 1 + \sqrt{2}$.

ε) Να δείξετε ότι υπάρχει $x_0 \in (3, 4)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0) = x_0^2 - x_0$.