

1.5 Εσωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων

ΟΡΙΣΜΟΣ

- Ονομάζουμε **εσωτερικό γινόμενο** δύο μη μηδενικών διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ και το συμβολίζουμε με $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$ τον πραγματικό αριθμό

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}| \cdot \cos \varphi,$$

όπου φ η γωνία των διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$.

- Αν $\vec{\alpha} = \vec{0}$ ή $\vec{\beta} = \vec{0}$, τότε ορίζουμε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$

Για παράδειγμα, το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με $|\vec{\alpha}| = 3$, $|\vec{\beta}| = 8$ και $\varphi = \frac{\pi}{3}$ είναι

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 3 \cdot 8 \cdot \cos \frac{\pi}{3} = 3 \cdot 8 \cdot \frac{1}{2} = 12.$$

Συνέπειες του ορισμού

- $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\beta} \cdot \vec{\alpha}$ (Αντιμεταθετική ιδιότητα)
- Αν $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0$ και αντιστρόφως.
- Αν $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$ και αντιστρόφως.
- Αν $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = -|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$ και αντιστρόφως.

$$\vec{\alpha}^2 = |\vec{\alpha}|^2$$

Αναλυτική έκφραση Εσωτερικού Γινομένου

Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι ίσο με το άθροισμα των γινομένων των ομώνυμων συντεταγμένων τους

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = x_1 x_2 + y_1 y_2$$

Παράδειγμα: $\vec{\alpha} = (-3, 4)$ και $\vec{\beta} = (2, -1)$

$$\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} =$$

Ιδιότητες

- $(\lambda \vec{\alpha}) \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot (\lambda \vec{\beta}) = \lambda(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})$
- $\vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) = \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}$ (Επιμεριστική Ιδιότητα)
- $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 = -1$, όπου $\lambda_1 = \lambda_{\vec{\alpha}}$ και $\lambda_2 = \lambda_{\vec{\beta}}$, εφόσον $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \nparallel y'y$

Αποδείξεις: Πράγματι, αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$, $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ και $\vec{\gamma} = (x_3, y_3)$, τότε έχουμε:

- $(\lambda \vec{\alpha}) \cdot \vec{\beta} = (\lambda x_1, \lambda y_1)(x_2, y_2) = (\lambda x_1)x_2 + (\lambda y_1)y_2 = \lambda(x_1x_2 + y_1y_2) = \lambda(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})$

και

$$\vec{\alpha} \cdot (\lambda \vec{\beta}) = (x_1, y_1)(\lambda x_2, \lambda y_2) = x_1(\lambda x_2) + y_1(\lambda y_2) = \lambda(x_1x_2 + y_1y_2) = \lambda(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}).$$

Άρα,

$$(\lambda \vec{\alpha}) \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot (\lambda \vec{\beta}) = \lambda(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})$$

- $$\begin{aligned}\vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) &= (x_1, y_1)(x_2 + x_3, y_2 + y_3) = x_1(x_2 + x_3) + y_1(y_2 + y_3) \\ &= (x_1x_2 + x_1x_3) + (y_1y_2 + y_1y_3) = (x_1x_2 + y_1y_2) + (x_1x_3 + y_1y_3) \\ &= \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma}.\end{aligned}$$

- $$\vec{\alpha} \perp \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = 0 \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 = 0 \Leftrightarrow y_1y_2 = -x_1x_2 \Leftrightarrow \frac{y_1}{x_1} \frac{y_2}{x_2} = -1 \Leftrightarrow \lambda_1 \lambda_2 = -1$$

Συνημίτονο Γωνίας δύο Διανυσμάτων

$$\cos \theta = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}}{|\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|}$$

$$\cos \theta = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2}}$$

Παράδειγμα: $\vec{\alpha} = (1, 2)$ και $\vec{\beta} = (3, 1)$

$\cos \theta =$

Προσοχή στα διανύσματα!!

1. Δεν ισχύει η Προσεταιριστική ιδιότητα δηλαδή: $\vec{\alpha} \cdot (\vec{\beta} \cdot \vec{\gamma}) \neq (\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}) \cdot \vec{\gamma}$
2. Δεν ισχύει $\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} = \vec{\alpha} \cdot \vec{\gamma} \Leftrightarrow \vec{\beta} = \vec{\gamma}$
3. Μόνο αν το $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$ ή αν $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$ τότε $|\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}| = |\vec{\alpha}| \cdot |\vec{\beta}|$
4. Μόνο αν το $\vec{\alpha} // \vec{\beta}$ τότε $(\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta})^2 = \vec{\alpha}^2 \cdot \vec{\beta}^2$

Μεθοδολογία για ασκήσεις

Πως υπολογίζω μέτρο των διανυσμάτων;

Για να υπολογίσω το μέτρο ενός διανύσματος α , που μας δίνεται ως γραμμικός συνδυασμός δύο άλλων διανυσμάτων, θα υπολογίσουμε το τετράγωνο του μέτρου του.

Όπου χρειάζεται θα εφαρμόσω τις γνωστές ταυτότητες

$$1. \left| \vec{\alpha} + \vec{\beta} \right|^2 = \left(\vec{\alpha} + \vec{\beta} \right)^2 = \vec{\alpha}^2 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = |\vec{\alpha}|^2 + 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + |\vec{\beta}|^2$$

$$2. \left| \vec{\alpha} - \vec{\beta} \right|^2 = \left(\vec{\alpha} - \vec{\beta} \right)^2 = \vec{\alpha}^2 - 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + \vec{\beta}^2 = |\vec{\alpha}|^2 - 2\vec{\alpha} \cdot \vec{\beta} + |\vec{\beta}|^2$$

$$3. \left(\vec{\alpha} + \vec{\beta} \right) \cdot \left(\vec{\alpha} - \vec{\beta} \right) = \vec{\alpha}^2 - \vec{\beta}^2 = |\vec{\alpha}|^2 - |\vec{\beta}|^2$$

Παράδειγμα

Υπολόγισε το μέτρο του διανύσματος

$$|\vec{a}| = |2\vec{x} + 3\vec{y}|$$

$$|\vec{a}|^2 = |2\vec{x} + 3\vec{y}|^2 =$$
