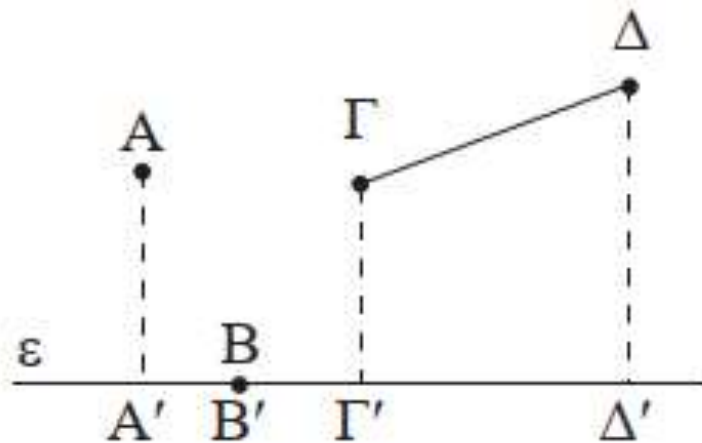


9.1 Ορθές προβολές

9.2 Το Πυθαγόρειο θεώρημα



Έχουμε ένα σημείο A εκτός ευθείας ε . Το ίχνος A' της καθέτου που φέρνω από το A προς την ε το λέμε **ορθή προβολή** ή απλώς **προβολή** του A στην ευθεία ε .

Αν το B είναι πάνω στην ευθεία προβολή είναι το **ίδιο** το σημείο.

Το **τμήμα $\Gamma\Delta$** έχει ορθή **προβολή** το τμήμα $\Gamma'\Delta'$.

ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

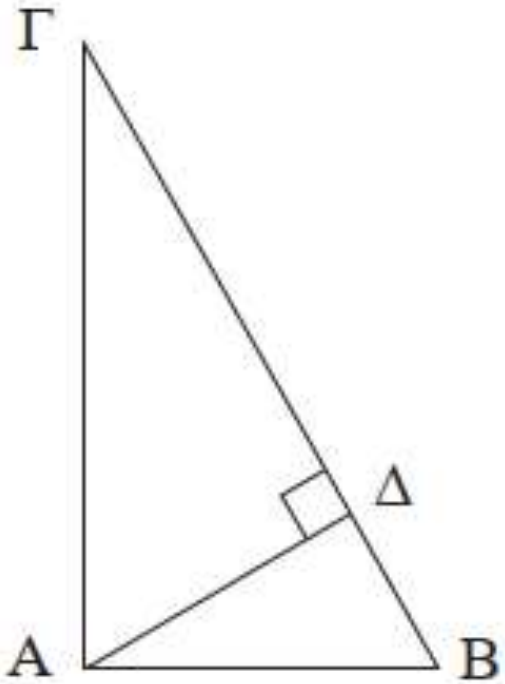
ΘΕΩΡΗΜΑ Ι

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτείνουσα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

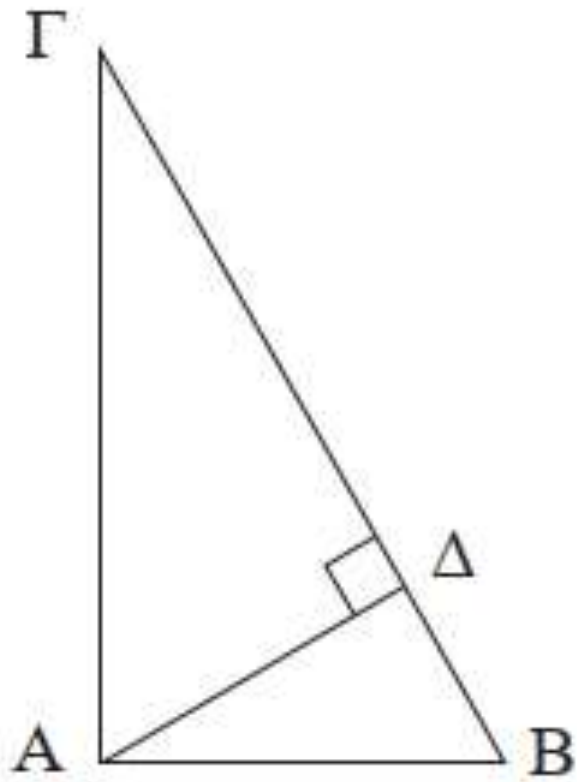
Έστω λοιπόν ένα ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ και Δ η προβολή της κορυφής A στην υποτείνουσα $B\Gamma$. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι $AB^2 = B\Gamma \cdot B\Delta$ και $A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot \Gamma\Delta$.

Για την πρώτη σχέση αρκεί να αποδείξουμε ότι $\frac{AB}{B\Delta} = \frac{B\Gamma}{AB}$, δηλαδή ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $\Delta B A$ είναι όμοια, το οποίο ισχύει αφού $\hat{A} = \hat{\Delta} = 1\perp$ και η $\hat{B}$ είναι κοινή. Όμοια αποδεικνύεται και η σχέση $A\Gamma^2 = B\Gamma \cdot \Gamma\Delta$.

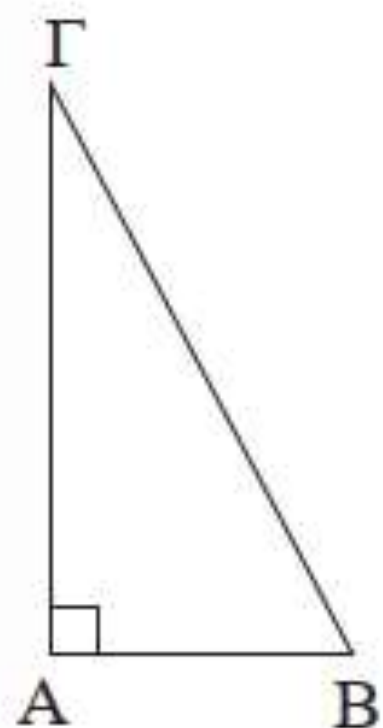


ΠΟΡΙΣΜΑ

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, ο λόγος των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του είναι ίσος με το λόγο των προβολών τους πάνω στην υποτείνουσα.



$$\frac{AB^2}{AG^2} = \frac{B\Delta}{\Gamma\Delta}$$



ΘΕΩΡΗΜΑ II (Πυθαγόρειο)

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το άθροισμα των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας.

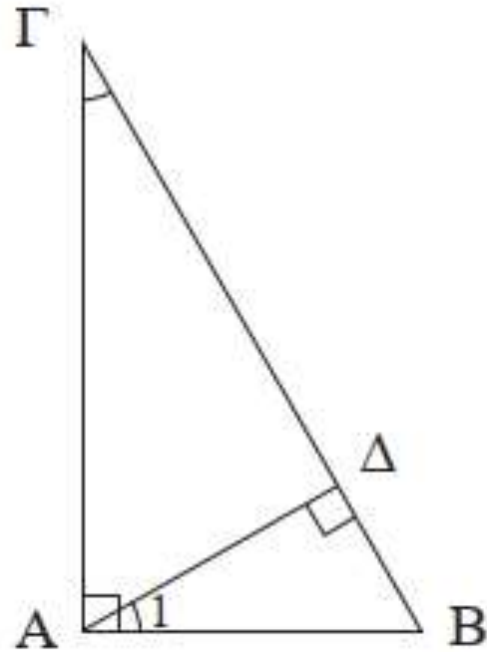
$$AB^2 + AG^2 = BG^2 \text{ ή } \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$$

ΘΕΩΡΗΜΑ III (Αντίστροφο του Πυθαγορείου)

Αν σε τρίγωνο ABΓ ισχύει $AB^2 + AG^2 = BG^2$, τότε $\hat{A} = 1\perp$.

ΘΕΩΡΗΜΑ IV

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους του που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών του στην υποτείνουσα.



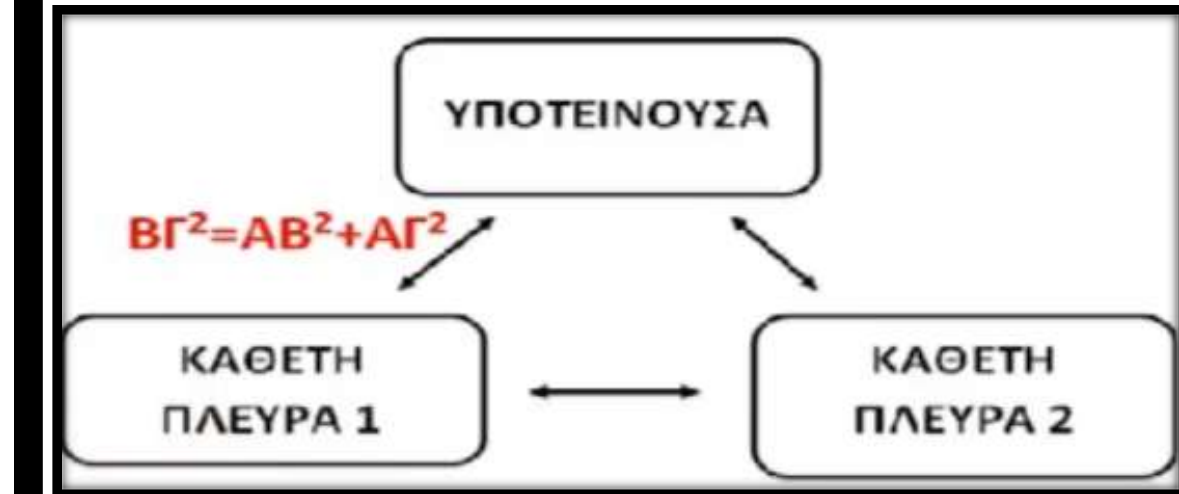
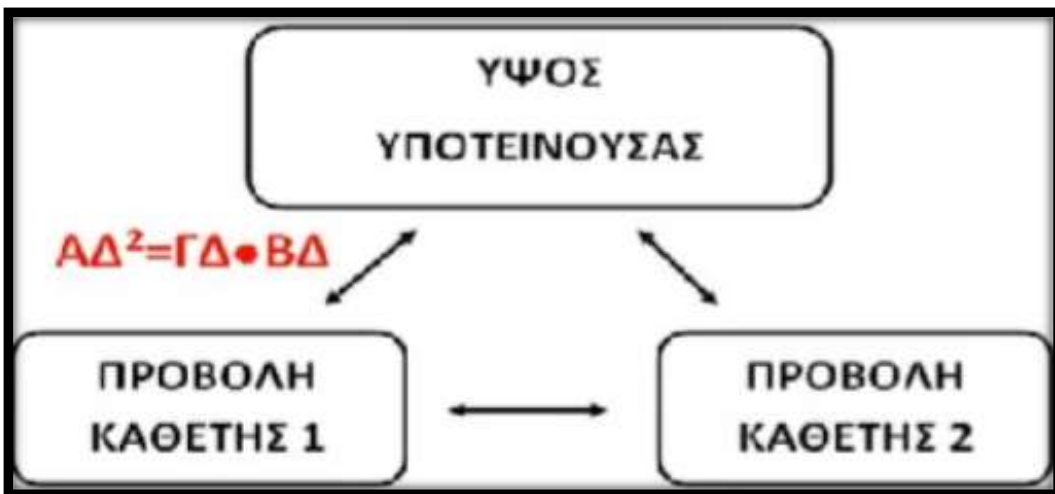
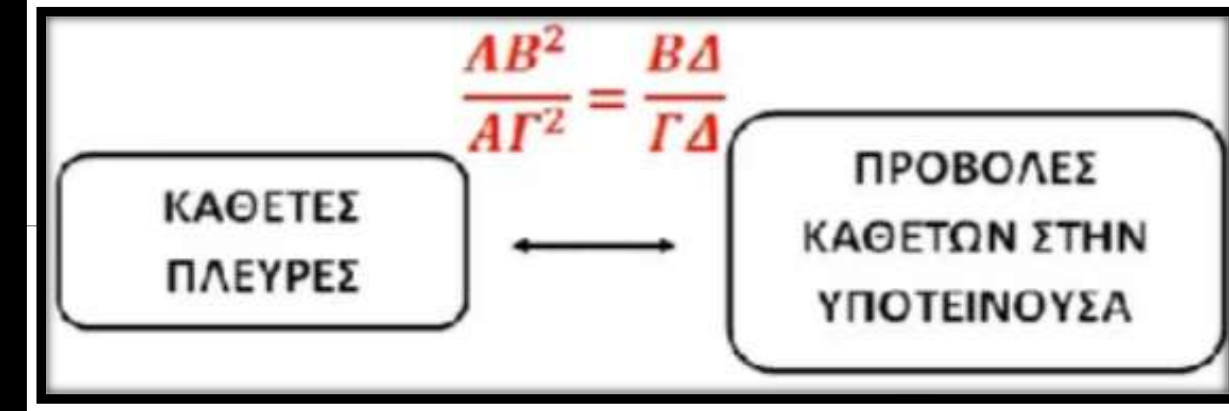
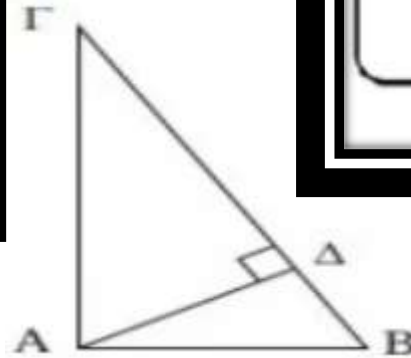
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω ΑΔ το ύψος του ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ (σχ.4), που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα. Θα αποδείξουμε ότι

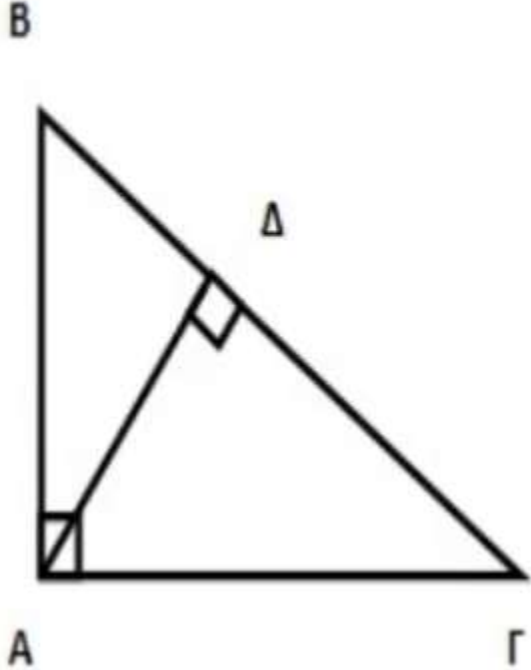
$$ΑΔ^2 = ΒΔ \cdot ΔΓ$$

Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΓΑΔ είναι όμοια, αφού είναι ορθογώνια και $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}$ ως συμπληρωματικές της $\hat{B}$. Επομένως, οι πλευρές τους είναι ανάλογες, δηλαδή $\frac{ΑΔ}{ΒΔ} = \frac{ΔΓ}{ΑΔ}$, οπότε $ΑΔ^2 = ΒΔ \cdot ΔΓ$.

Εφαρμογή τύπων σε ασκήσεις



Παράδειγμα

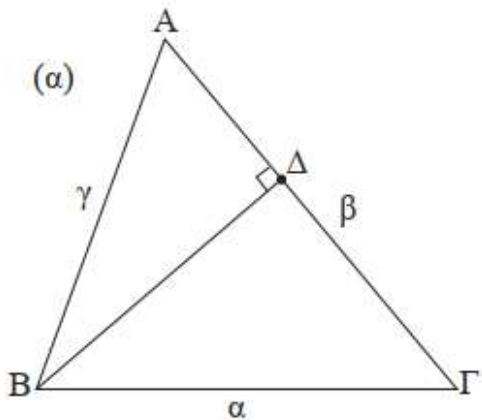
ΔΕΔΟΜΕΝΑ	ΣΧΗΜΑ	ΛΥΣΗ
$\hat{A} = 90^\circ$ $AB=4, B\Gamma=8$ AD ΥΨΟΣ		$AB^2 = B\Delta \cdot B\Gamma \Leftrightarrow 16 = B\Delta \cdot 8 \Leftrightarrow B\Delta = 2$ $\Delta\Gamma = B\Gamma - B\Delta = 8 - 2 = 6 \Leftrightarrow \Delta\Gamma = 6$
ΖΗΤΟΥΜΕΝΑ		$AD^2 = B\Delta \cdot \Delta\Gamma = 2 \cdot 6 = 12 \Leftrightarrow AD = \sqrt{12}$ $AG^2 = B\Gamma \cdot \Delta\Gamma = 6 \cdot 8 = 48 \Leftrightarrow AG = \sqrt{48}$ $AB^2 + AG^2 = B\Gamma^2 \text{ ή } \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$

9.4 Γενίκευση του Πυθαγορείου θεωρήματος

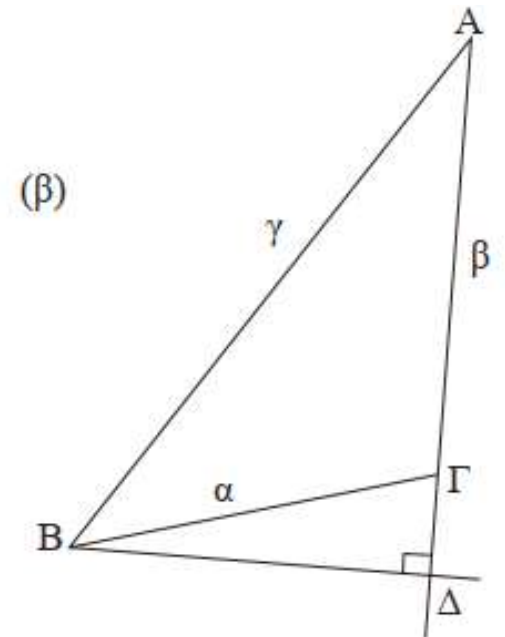
Για οξεία γωνία

ΘΕΩΡΗΜΑ Ι

Το τετράγωνο πλευράς τριγώνου, που βρίσκεται απέναντι από οξεία γωνία, είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών του, ελαττωμένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μίας από αυτές επί την προβολή της άλλης πάνω σε αυτή.



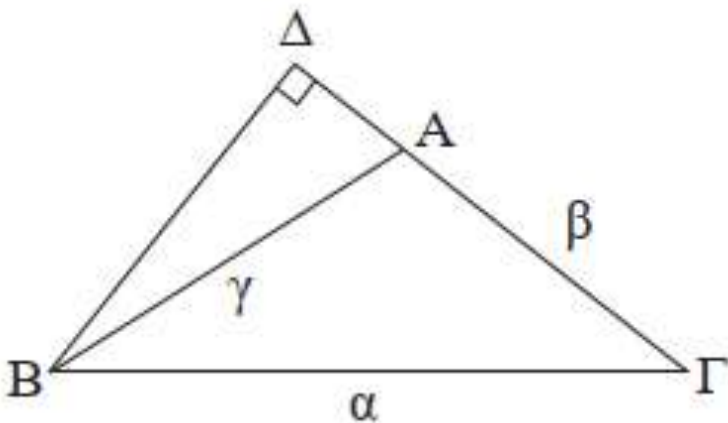
$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 - 2\beta \cdot \Delta\Delta$$



Για αμβλεία γωνία

ΘΕΩΡΗΜΑ II

Το τετράγωνο πλευράς τριγώνου που βρίσκεται απέναντι από αμβλεία γωνία είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, αυξημένο κατά το διπλάσιο γινόμενο της μίας από αυτές επί την προβολή της άλλης πάνω σε αυτή.



$$\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2 + 2\beta \cdot A\Delta$$

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ

- i) Αν $\hat{A} < 1\text{L}$, τότε $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$,
- ii) Αν $\hat{A} = 1\text{L}$, τότε $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$,
- iii) Αν $\hat{A} > 1\text{L}$, τότε $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$.

Άρα:

ΠΟΡΙΣΜΑ

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύουν οι ισοδυναμίες:

- i) $\alpha^2 > \beta^2 + \gamma^2$, αν και μόνο αν $\hat{A} > 1\text{L}$,
- ii) $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$, αν και μόνο αν $\hat{A} = 1\text{L}$,
- iii) $\alpha^2 < \beta^2 + \gamma^2$, αν και μόνο αν $\hat{A} < 1\text{L}$.

ΝΟΜΟΣ ΤΩΝ ΣΥΝΗΙΤΟΝΩΝ

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ ισχύει η σχέση

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A.$$
