

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (ΑΛΓΕΒΡΑ)

Γ' ΤΑΞΗ ΕΠΑ.Λ

Σχ. Έτος 2025 – 26



ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΦΩΚΑΣ ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ - ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ

Περιεχόμενα

Συναρτήσεις - Πεδίο Ορισμού	4
Όριο.....	7
Όριο (παράμετροι)	10
Συνέχεια Συνάρτησης.....	11
Ερωτήσεις τύπου Σωστό - Λάθος στις Συναρτήσεις.....	15
Παράγωγος συνάρτηση	17
Εφαπτομένη	19
Ρυθμός μεταβολής.....	20
Μονοτονία – Ακρότατα	21
Ρυθμός μεταβολής και Μονοτονία – Ακρότατα	22

1^ο ΚΕΦΑΛΑΙΟ

ΔΙΑΦΟΡΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

Ερωτήσεις ανάπτυξης

Συναρτήσεις - Πεδίο Ορισμού

1. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

i. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 3x + 2}$

ii. $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 4}$

iii. $f(x) = \frac{1}{x^2 - x + 1}$

2. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

i. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 5x + 6}$

ii. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 4}$

iii. $f(x) = \frac{1}{x^2 + x + 5}$

iv. $f(x) = \frac{1}{x^2 + 5x}$

3. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

i. $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$

ii. $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 4}$

iii.

$f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1}$

4. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

i. $f(x) = \sqrt{-x^2 + 3x - 2}$

ii. $f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 9}$

iii. $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 5}$

5. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

$$\text{i. } f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 3x + 2}} \quad \text{ii. } f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4x + 4}} \quad \text{iii.}$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - x + 1}}$$

6. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

$$\text{i. } f(x) = \frac{1}{\sqrt{-x^2 + 3x - 2}} \quad \text{ii. } f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 4x + 5}} \quad \text{iii. } f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}$$

7. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

$$\text{i. } f(x) = \ln(x^2 - 3x + 2) \quad \text{ii. } f(x) = \ln(x^2 - 4x + 4) \quad \text{iii. } f(x) = \ln(x^2 - x + 1)$$

8. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

$$\text{i. } f(x) = \ln(-x^2 + 3x - 2) \quad \text{ii. } f(x) = \ln(x^2 + 4x + 7) \quad \text{iii. } f(x) = \ln(x^2 - 6x + 9)$$

9. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

$$\text{i. } f(x) = \frac{1}{\ln(x-1)} \quad \text{ii. } f(x) = \frac{1}{\ln(e^x - e)}$$

10. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

$$\text{i. } f(x) = \frac{1}{\ln(2-x)} \quad \text{ii. } f(x) = \frac{1}{\ln(e^x - 1)} \quad \text{iii. } f(x) = \frac{1}{\ln x^2}$$

$$\text{iv. } f(x) = \frac{1}{\ln(x^2 - 3)} \quad \text{v. } f(x) = \frac{1}{\ln(e^x - e^2)} \quad \text{vi. } f(x) = \frac{1}{\ln(-x^2 + x)}$$

11. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

i. $f(x) = \sqrt{\ln x}$

ii. $f(x) = \sqrt{\ln^2 x - 4}$

iii. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{\ln(x^2 - 1)}}$

12. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

i. $f(x) = \frac{1}{|x-2|-3}$

ii. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x+2|-3}}$

iii. $f(x) = \sqrt{2-|x+1|}$

iv. $f(x) = \frac{1}{|x|-2} + \frac{1}{\sqrt{1+3x}}$

13. Να βρεθούν τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

i. $f(x) = \frac{1}{2-|x+1|}$

ii. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{4-|x+1|}}$

iii. $f(x) = \sqrt{|x-2|-1}$

iv. $f(x) = \frac{1}{|x|-4} + \frac{1}{\sqrt{1+2x}}$

14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - x^2$

i) Να βρείτε τις τιμές $f(-1)$, $f(-\frac{2}{3})$, $f(h-1)$

ii) Για ποιες τιμές του x είναι $f(x) < 0$

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{2-8x^2}$

i) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

ii) Αν το σημείο $M(x,y)$ ανήκει στην καμπύλη της f , να αποδείξετε ότι η απόσταση του από την αρχή των αξόνων O είναι $(OM) = \sqrt{2-7x^2}$

16. Αν $f(x) = 4x^3 - 4x^2 - 9x + 11$, να υπολογίσετε τις τιμές $f(0)$, $f(-2)$, $f(3)$. Για ποιες τιμές του x είναι $f(x) = 2$;

17. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων:

$$\alpha) f(x) = \frac{x^2 + 1}{8x^2 - 6x + 1} \quad \beta) g(x) = \frac{2x}{x^3 + x^2 - 2}$$

$$\gamma) h(x) = \frac{1}{\sqrt{3x^3 - 4x^2 - 5x + 2}}$$

Όριο

18. Να βρεθούν τα όρια:

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow -2} (x^3 - 3x^2 - 5) \quad \text{ii. } \lim_{x \rightarrow -1} (5x - 2)^2 (1 - \sqrt{x + 5}) \quad \text{iii. } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{2x^3 - 3}{x + 1}$$

$$\text{iv. } \lim_{x \rightarrow \pi} (\eta\mu x + 5\sigma\upsilon\nu^2 x - \varepsilon\varphi x) \quad \text{v. } \lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{4x - 1}{2x} \quad \text{vi. } \lim_{x \rightarrow \pi} \left[\left(\eta\mu \frac{x}{2} + \sigma\upsilon\nu \frac{x}{2} \right) \right]$$

19. Να υπολογίσετε τα όρια:

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 - 2x}{2x^2 - 5x + 3} \quad \text{ii. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 8}{x^3 - 7x + 6} \quad \text{iii. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - x}{x^2 - 3x + 2}$$

$$\text{iv. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 + x - 10} \quad \text{v. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^3 - 8} \quad \text{vi. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 4}$$

$$\text{vii. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x+3)^3 - 27}{x}$$

$$\text{viii. } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^3 - x^3}{h}$$

$$\text{ix. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \frac{1}{x^2}}{1 - \frac{1}{x^3}}$$

20. Να βρεθούν τα όρια:

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^3 + x^2 + x + 1}$$

$$\text{ii. } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - x^2 - x - 2}{x^3 - 8}$$

$$\text{iii. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + x^2 - 2}{x - 1}$$

$$\text{iv. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 6x + 5}{x^2 - 4x + 3}$$

$$\text{v. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 5x^2 + 4}{x^2 - 1}$$

$$\text{vi. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 3x^2 - 4}{x - 1}$$

$$\text{vii. } \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x \cdot \eta\mu x + \pi \cdot \sigma\upsilon\nu x - x \cdot \sigma\upsilon\nu x - \pi \cdot \eta\mu x}{x^2 - \pi^2}$$

21. Να βρεθούν τα όρια:

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{5}}{x - 5}$$

$$\text{ii. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 5x + 4}{3\sqrt{x^2 + 3} - 6}$$

$$22. \text{ Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \frac{\sqrt{x+2} - 2}{\sqrt{x^2+5} - 3}$$

i. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f

ii. Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

23. Να βρείτε τα όρια:

$$\text{i. } \lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{x} - \sqrt{3}}{x^2 - 3x}$$

$$\text{ii. } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{3-x} - 2}{3 - \sqrt{10+x}}$$

24. Να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{1-\sqrt{x-2}}$

ii. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}} \frac{\sqrt{4x^2+3}+2x-3}{6x^2-x-1}$

25. Να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2-3x}{x-\sqrt{x+1}-1}$, με $x \in (0,3) \cup (3,+\infty)$

26. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sqrt[4]{1+x} - \sqrt[4]{1-x}}{x}$

i. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f

ii. Να υπολογιστεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$

27. Να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

28. Να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt[3]{x} - \sqrt{x} - 2}{x-1}$

29. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 2x$. Να βρεθούν τα όρια

i. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x^2-4}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+9}-3}{f(x)-f(0)}$

iii. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+2)-f(2)}{h}$

30. Έστω η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 5x + 6$. Να βρεθούν τα όρια

i. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{f(x)}{x-2}$

ii. $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{f(x) - f(5)}{x-5}$

iii. $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h+1) - f(1)}{h}$

31. Αν $\lim_{x \rightarrow 5} [f(x) + x^2 - 2x] = 7$, να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 5} f(x)$

32. Θεωρούμε την συνάρτηση f για την οποία ισχύει η σχέση $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - x}{x-1} = 2$. Να

βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$

33. Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = \sqrt{x+2} - 2$ και $g(x) = \sqrt{x-1} - 1$

i. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των f, g .

ii. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$

iii. Να βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow 2} h(x)$

Όριο (παράμετροι)

34. Να βρεθούν οι τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 7$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x^2 + 3\beta x - 5}{x-1}, & x \neq 1 \\ 7, & x = 1 \end{cases}$$

35. Αν $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + \alpha x + \beta}{1-x^2} = -2$, να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

36. Αν $\alpha + \beta + 5 = 0$, τότε

i. να βρεθεί το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\alpha x^4 + \beta x^3 + 5}{x - 1}$

ii. να βρεθούν τα α, β αν το προηγούμενο όριο είναι 2.

37. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+1}{x^2 - 5x + 6}$

i. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f

ii. Να βρεθεί το $\kappa \in \mathbb{R}$, ώστε $\lim_{x \rightarrow 2} [(x-2) \cdot f(x)] = \kappa^2 - 4\kappa$

38. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x - \sqrt{x^2 + 3}$. Να βρεθούν τα όρια

i. $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ ii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2 - 1}$

iii. Να βρεθεί το $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε $\lim_{x \rightarrow 1} \left[f(x) + \lambda^2 + \lambda + \frac{3}{4} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x^2 - 1}$

Συνέχεια Συνάρτησης

39. Να μελετηθούν ως προς τη συνέχεια στο $x_0 = 1$, οι συναρτήσεις:

i. $f(x) = \frac{x}{x-1}$ ii. $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 1 \\ x+1, & x > 1 \end{cases}$

40. Να εξεταστεί αν είναι συνεχείς στο $x_0 = 1$, οι συναρτήσεις

$$\text{i. } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-1}{x-1}, & x \neq 1 \\ 5, & x = 1 \end{cases}, \quad x_0 = 1 \qquad \text{ii. } f(x) = \begin{cases} \frac{x^3+8}{x+2}, & x \neq -2 \\ 12, & x = -2 \end{cases}, \quad x_0 = -2$$

$$41. \text{ Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} \frac{x^3+3x^2-2x-2}{x-1}, & x \neq 1 \\ 5, & x = 1 \end{cases}$$

Να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$

$$42. \text{ Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x-2}{2x-4}, & x \neq 2 \\ \frac{\alpha^2}{2} + \alpha, & x = 2 \end{cases}$$

i. Να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$

ii. Να βρείτε το α ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 2$

$$43. \text{ Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} \frac{x^2-x-12}{2x-8}, & x \neq 4 \\ \frac{7}{2}, & x = 4 \end{cases}$$

Να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = 4$

$$44. \text{ Δίνεται η συνάρτηση } f(x) = \begin{cases} \frac{3x^2-x-2}{x-1}, & x \neq 1 \\ 5, & x = 1 \end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$

45. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2+5}-3}{4+2x}, & \alpha\nu \ x \neq -2 \\ \frac{1}{3}, & \alpha\nu \ x = -2 \end{cases}$

Να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στο $x_0 = -2$

46. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 1, & x \neq \alpha \\ -6, & x = \alpha \end{cases}$

Να εξετάσετε αν η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

47. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{1-\sqrt{3x-2}}{x-1}, & \alpha\nu \ x \neq 1 \\ 2\alpha+1, & \alpha\nu \ x = 1 \end{cases}$

Να βρείτε το α ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$

48. Αν η συνάρτηση $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνεχής και ισχύει $(x-1) \cdot f(x) = x^2 - 3x + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρεθεί η τιμή $f(1)$

49. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $(\sqrt{x^2+x+4}+4)f(x) = x-3$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, να βρεθεί το $f(3)$

50. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και η C_f διέρχεται από το σημείο $A(-2, 5)$, να

βρεθεί το όριο $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x)(\sqrt{1-4x}-3)}{x^2+5x+6}$

51. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής και η καμπύλη της διέρχεται από το σημείο $A(-1, 2)$ να

βρείτε το $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)(x^2+x)}{2-\sqrt{x+5}}$

52. Αν η καμπύλη της f δεν διακόπτεται στο σημείο της $(1, 2)$ να υπολογίσετε τα όρια:

i. $\lim_{x \rightarrow 1} \left[2f^3(x) + \frac{\sqrt{2f(x)}}{f(x)+1} \right]$ ii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f^2(x)-1}{f(x)-1}$ iii. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{f(x)+3}-2}{f^2(x)-3f(x)+6}$

53. Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0 = 1$ και η καμπύλη της f διέρχεται από το σημείο

$A(1, 2)$ να βρείτε το $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 f(x) - f(x)}{3x^2 - x - 2}$

54. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{9-x^2}{x+3}$. Να ορισθεί κατάλληλα στο σημείο που δεν

ορίζεται, ώστε η συνάρτηση που θα προκύψει να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$.

55. Αν για τη συνεχή f ισχύει $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - \eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x}{x} = 2019$ να βρεθεί το $f(0)$

56. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{4-x}-\sqrt{3}}{x-\sqrt{x}}, & x \in (0,1) \cup (1,4] \\ \alpha & , x=1 \end{cases}$

Να βρεθεί το $\alpha \in \mathbb{R}$, ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0 = 1$

57. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 + \beta x + 3}{x-1}, & x \neq 1 \\ \alpha & , x=1 \end{cases}$. Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η f

να είναι συνεχής στο 1 και η C_f να διέρχεται από το σημείο $A(2, -1)$

58. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{\alpha x^3 + \beta x - 3}{x-1}, & x \neq 1 \\ 5 & , x=1 \end{cases}$ να είναι

συνεχής.

59. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - \alpha x + \beta}{x-2}$

i. Να βρεθούν τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 1$

ii. Να ορισθεί κατάλληλα η f στο $x_0 = 2$, ώστε η συνάρτηση που θα προκύψει να είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$

Ερωτήσεις τύπου Σωστό - Λάθος στις Συναρτήσεις

1. Αν οι συναρτήσεις f και g έχουν κοινό πεδίο ορισμού το A τότε και η f/g έχει πεδίο ορισμού το A .

2. Η καμπύλη της συνάρτησης $f(x) = x^2$ είναι μια υπερβολή.

3. Αν μια συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα Δ και $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 > x_2$ τότε $f(x_1) > f(x_2)$.
4. Αν μια συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη τότε είναι γνησίως αύξουσα.
5. Σε μία συνάρτηση, ένα τοπικό ελάχιστο μπορεί να είναι μεγαλύτερο από ένα τοπικό μέγιστο.
6. Ένα σημείο $M(x, y)$ ανήκει στην C_f αν και μόνο αν $y = f(x)$
7. Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x-1}$ έχει πεδίο ορισμού το $(1, +\infty)$
8. Αν δύο συναρτήσεις f και g έχουν πεδίο ορισμού το A , τότε ορίζεται και η συνάρτηση $\frac{f}{g}$, με πεδίο ορισμού το A
9. Αν η συνάρτηση f έχει στο x_0 όριο έναν πραγματικό αριθμό l , δηλαδή αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (k \cdot f(x)) = k \cdot l$
10. Μια συνάρτηση f λέγεται γνησίως αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε σημεία $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει $f(x_1) < f(x_2)$

Παράγωγος συνάρτηση

60. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2$. Με τη βοήθεια του ορισμού της παραγώγου να βρείτε την $f'(3)$.

61. Να βρείτε με τη βοήθεια του ορισμού της παραγώγου την εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης της $f(x) = 8x^{-1}$ στο σημείο της $A(2, f(2))$

62. Να βρείτε το ρυθμό μεταβολής του όγκου ενός κύβου ακμής x ως προς x , όταν $x=5$.

63. Να βρεθεί η παράγωγος της f στο x_0

i. $f(x) = x^3, \quad x_0 = 2$ ii. $f(x) = \eta\mu x, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}$

iii. $f(x) = x^7, \quad x_0 = 2$ iv. $f(x) = \sigma\upsilon\nu x, \quad x_0 = \frac{\pi}{2}$

64. Να βρεθεί η παράγωγος των συναρτήσεων

i. $f(x) = x^2 + x + 1$ ii. $f(x) = -3x^4 + 6x^2 - 1$

iii. $f(x) = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ iv. $g(x) = x^4 + 3x^2 + 2$

65. Να βρεθεί η παράγωγος των συναρτήσεων

i. $f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 100$ ii. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x$

iii. $f(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ iv. $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$

66. Να βρεθεί η παράγωγος των συναρτήσεων

i. $f(x) = x^5 \eta \mu x$

ii. $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{\sigma \upsilon \nu x}$

iii. $f(x) = \frac{1}{\eta \mu x}$

iv. $f(x) = \frac{1}{\sigma \upsilon \nu x}$

v. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

67. Να βρεθεί η παράγωγος των συναρτήσεων

i. $f(x) = (x^2 + x + 1)^5$

ii. $f(x) = \eta \mu^5 x$

iii. $f(x) = \sigma \upsilon \nu^5 x$

68. Να βρεθεί η παράγωγος των συναρτήσεων

i. $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$

ii. $f(x) = \sqrt{\eta \mu x}$

69. Να βρεθεί η παράγωγος των συναρτήσεων

i. $f(x) = \eta \mu(\sigma \upsilon \nu x)$

ii. $f(x) = \sigma \upsilon \nu(\eta \mu x)$

iii. $f(x) = \varepsilon \varphi(x^2 + x + 1)$

70. Να βρεθεί η δεύτερη παράγωγος των συναρτήσεων

i. $f(x) = x^7 - 2x^3 + 5x$

ii. $f(x) = \eta \mu^2 x$

71. Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ ώστε η γραφική παράσταση της $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$ να περνάει από τα σημεία $O(0,0)$ και $A(1,1)$ και στα σημεία αυτά η παράγωγος να είναι μηδέν.

72. Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + 9x - 12$. Να βρείτε τα $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε η C_f να διέρχεται από το $A(2, -10)$ και η παράγωγος στο σημείο αυτό να είναι -3 .

Εφαπτομένη

73. Να βρείτε την εξίσωση εφαπτομένης της καμπύλης της συνάρτησης $f(x) = 2x^2 + 3$ στο σημείο της με τετμημένη $x_0 = 1$.

74. Να βρείτε τις εξισώσεις των εφαπτόμενων της καμπύλης της συνάρτησης $f(x) = x^2$ οι οποίες διέρχονται από το σημείο $(2, 3)$.

75. Να βρείτε την εφαπτομένη της καμπύλης της συνάρτησης $f(x) = x^2 - 3x + 1$ που είναι παράλληλη στην ευθεία $y = x + 2$.

76. Να βρείτε τις τιμές α και β ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $f(x) = \alpha x^2 + \beta$ στο σημείο της $(1, 5)$ να είναι κάθετη στην ευθεία (ζ) : $x + 4y - 2 = 0$.

77. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \alpha x^3 + 2$ και $g(x) = x^2 + \beta x + 1$, όπου α και β είναι πραγματικοί αριθμοί. Να βρείτε τις τιμές των α και β ώστε οι C_f και C_g να έχουν κοινή εφαπτομένη στο κοινό τους σημείο με τετμημένη $x_0 = 1$.

Ρυθμός μεταβολής

78. Το συνολικό κόστος παραγωγής x μονάδων προϊόντος δίνεται από τη συνάρτηση

$$K(x) = 20 + \frac{400}{x} \text{ ευρώ.}$$

- i. Να βρεθεί η συνάρτηση του μέσου κόστους
- ii. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του μέσου κόστους
- iii. Να συγκρίνετε τους ρυθμούς μεταβολής του συνολικού και του μέσου κόστους όταν $x=10$

79. Η θέση ενός υλικού σημείου, το οποίο εκτελεί ευθύγραμμη κίνηση δίνεται από τον τύπο $x = x(t) = -t^3 + 12t^2 - 36t$, όπου το t μετριέται σε δευτερόλεπτα και το x σε μέτρα.

- i. Να βρείτε την ταχύτητα και την επιτάχυνση του σημείου για $t=1s$.
- ii. Πότε το σημείο είναι (στιγμιαία) ακίνητο;
- iii. Να βρείτε πότε το σημείο κινείται στη θετική κατεύθυνση, πότε στην αρνητική κατεύθυνση και να παραστήσετε σχηματικά την κίνηση του σημείου.
- iv. Να βρείτε το ολικό διάστημα που έχει διανύσει το σημείο στη διάρκεια των πρώτων $7s$.

80. Ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει περίμετρο 10

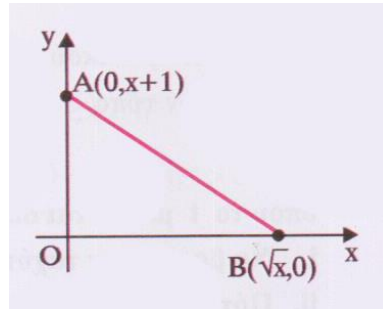
- i. Να βρεθεί το εμβαδόν του E συναρτήσει της μιας πλευράς του x
- ii. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του εμβαδού όταν $x=2$

81. Έστω τα σημεία $A(0, x+1)$ και $B(\sqrt{x}, 0)$.

Να βρείτε τον ρυθμό μεταβολής:

i. της απόστασης των σημείων A και B ως προς x όταν $x=1$.

ii. του εμβαδού του τριγώνου OAB ως προς x όταν $x=1$.



Μονοτονία – Ακρότατα

82. Να μελετήσετε τις συναρτήσεις ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

i. $f(x) = 4x + 3$

ii. $f(x) = -2x + 10$

iii. $f(x) = x^2 - 1$

iv. $f(x) = -x^2 - 8x - 3$

83. Να μελετήσετε τις συναρτήσεις ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

i. $f(x) = 2x^3 - 15x^2 + 36x + 5$

ii. $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x - 4$

iii. $f(x) = -x^3 + x^2 - x - 1$

84. Να μελετήσετε τις συναρτήσεις ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

i. $f(x) = \frac{x+1}{x-3}$

ii. $f(x) = \frac{x^2 - 4x + 13}{x - 2}$

85. Να μελετήσετε τις συναρτήσεις ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

i. $f(x) = -2x + 1$

ii. $f(x) = -x^2 + 4x - 1$

iii. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$

iv. $f(x) = -x^4 + 6x^2 - 8x + 1$

86. Να εξετάσετε ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα τη συνάρτηση:

$$f(x) = x - 1 + \frac{4}{x-1}$$

Ρυθμός μεταβολής και Μονοτονία – Ακρότατα

87. Ένα εργοστάσιο παράγει συσκευές DVD. Η τιμή πώλησης ανά συσκευή καθώς και το κόστος παρασκευής x συσκευών την ημέρα σε € δίνονται αντίστοιχα από τους

$$\text{τύπους } T(x) = 180 - \frac{5}{2}x \text{ και } K(x) = \frac{5}{4}x^2 + 105x + 125.$$

α) Να βρείτε ποια πρέπει να είναι η ημερήσια παραγωγή ώστε το συνολικό κέρδος να μεγιστοποιείται.

β) Στην παραπάνω περίπτωση που το συνολικό κέρδος μεγιστοποιείται, να αποδείξετε ότι το μέσο κόστος παραγωγής γίνεται ελάχιστο.

88. Ένα σύρμα μήκους 1 m κόβεται σε δύο τμήματα με τα οποία σχηματίζουμε ένα κύκλο και ένα τετράγωνο αντίστοιχα. Να βρείτε τη πλευρά του τετραγώνου και τη διάμετρο του κύκλου, ώστε το άθροισμα των εμβαδών των δύο σχημάτων να είναι ελάχιστο.

89. Μια βιομηχανία καθορίζει την τιμή πώλησης $\Pi(x)$ σε ευρώ, κάθε μονάδας ενός προϊόντος, συναρτήσει του πλήθους x των μονάδων παραγωγής σύμφωνα με τον τύπο $\Pi(x) = 3300 - 3x$, $0 \leq x \leq 1000$. Το κόστος παραγωγής μιας μονάδας είναι 250 ευρώ. Αν η βιομηχανία πληρώνει φόρο 50 ευρώ, για κάθε μονάδα προϊόντος, να βρείτε πόσες μονάδες προϊόντος πρέπει να παράγει η βιομηχανία, ώστε να έχει το μέγιστο κέρδος.

90. Το κόστος C της ημερήσιας παραγωγής x μονάδων ενός προϊόντος από μια βιοτεχνία που απασχολεί v εργάτες δίνεται από τον τύπο: $C(x) = x^3 - 6vx^2 + 7v^3$ σε μονάδες ευρώ, $x > 0$. Το κέρδος ανά μονάδα προϊόντος είναι $12 - v$ δεκάδες ευρώ. Να βρείτε πόσες μονάδες πρέπει να παράγονται ημερησίως και από πόσους εργάτες, ώστε να έχουμε ελάχιστο κόστος και μέγιστο κέρδος.

91. Ένα παράθυρο σχήματος ορθογωνίου έχει περίμετρο 32cm. Να βρείτε τις διαστάσεις του, ώστε να μπαίνει από αυτό όσο γίνεται περισσότερο φως.