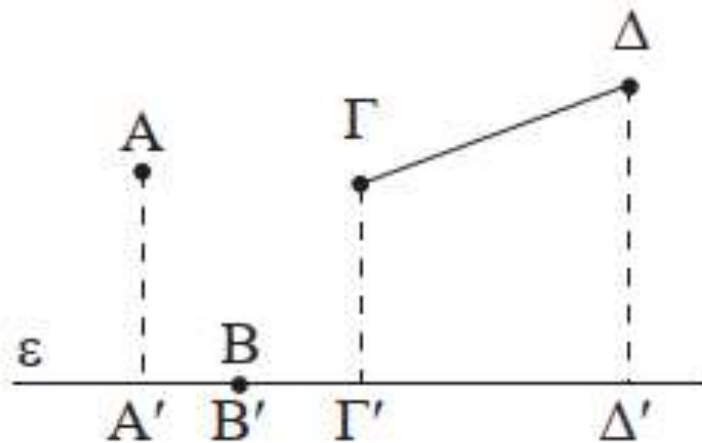


9.1 Ορθές προβολές

9.2 Το Πυθαγόρειο θεώρημα



Έχουμε ένα σημείο A εκτός ευθείας ε . Το ίχνος A' της καθέτου που φέρνω από το A προς την ε το λέμε **ορθή προβολή** ή απλώς **προβολή** του A στην ευθεία ε .

Αν το B είναι πάνω στην ευθεία προβολή είναι το **ίδιο** το σημείο.

Το **τμήμα $\Gamma\Delta$** έχει ορθή **προβολή** το τμήμα $\Gamma'\Delta'$.

ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟ ΘΕΩΡΗΜΑ

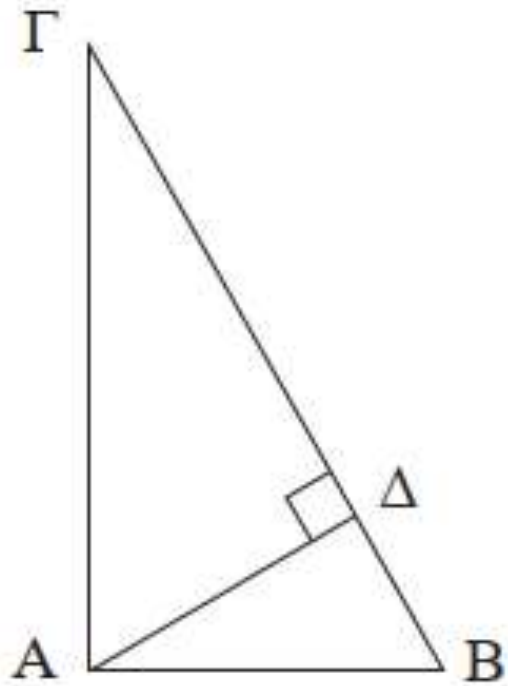
ΘΕΩΡΗΜΑ Ι

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο μιας κάθετης πλευράς του είναι ίσο με το γινόμενο της υποτείνουσας επί την προβολή της πλευράς αυτής στην υποτείνουσα.

ΑΠΟΔΕΙΞΗ

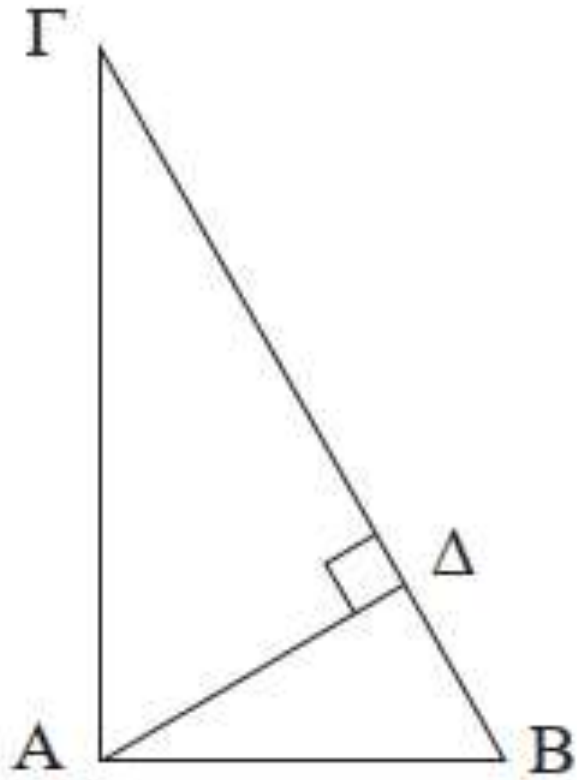
Έστω λοιπόν ένα ορθογώνιο τρίγωνο $ΑΒΓ$ και $Δ$ η προβολή της κορυφής $Α$ στην υποτείνουσα $ΒΓ$. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι $ΑΒ^2 = ΒΓ \cdot ΒΔ$ και $ΑΓ^2 = ΒΓ \cdot ΓΔ$.

Για την πρώτη σχέση αρκεί να αποδείξουμε ότι $\frac{ΑΒ}{ΒΔ} = \frac{ΒΓ}{ΑΒ}$, δηλαδή ότι τα τρίγωνα $ΑΒΓ$ και $ΔΒΑ$ είναι όμοια, το οποίο ισχύει αφού $\hat{Α} = \hat{Δ} = 1\text{L}$ και η $\hat{Β}$ είναι κοινή. Όμοια αποδεικνύεται και η σχέση $ΑΓ^2 = ΒΓ \cdot ΓΔ$.

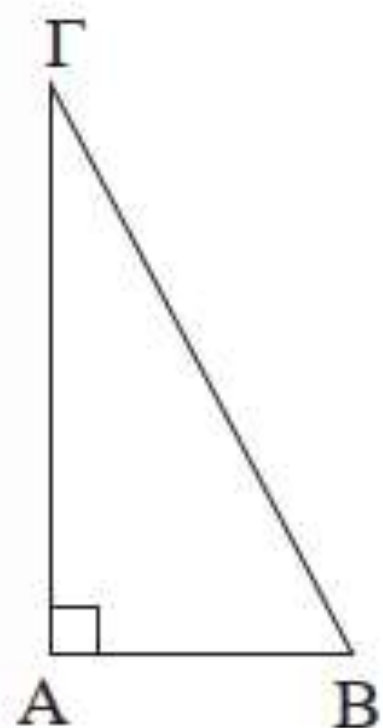


ΠΟΡΙΣΜΑ

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, ο λόγος των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του είναι ίσος με το λόγο των προβολών τους πάνω στην υποτείνουσα.



$$\frac{AB^2}{AG^2} = \frac{B\Delta}{\Gamma\Delta}$$



ΘΕΩΡΗΜΑ II (Πυθαγόρειο)

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το άθροισμα των τετραγώνων των κάθετων πλευρών του είναι ίσο με το τετράγωνο της υποτείνουσας.

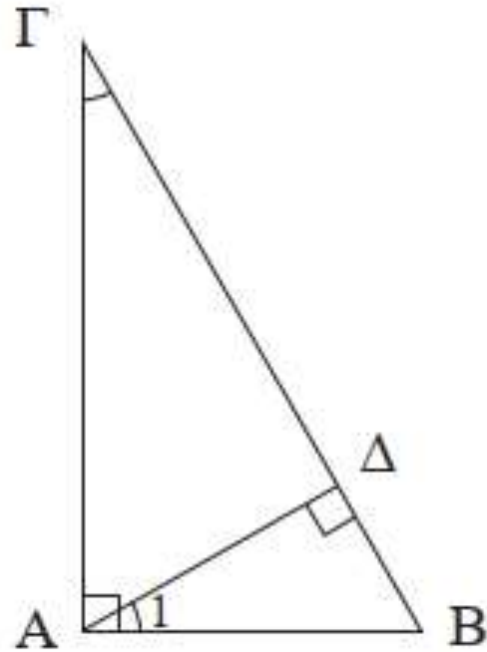
$$AB^2 + AΓ^2 = BΓ^2 \text{ ή } \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$$

ΘΕΩΡΗΜΑ III (Αντίστροφο του Πυθαγορείου)

Αν σε τρίγωνο ABΓ ισχύει $AB^2 + AΓ^2 = BΓ^2$, τότε $\hat{A} = 1\perp$.

ΘΕΩΡΗΜΑ IV

Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο του ύψους του που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα είναι ίσο με το γινόμενο των προβολών των κάθετων πλευρών του στην υποτείνουσα.



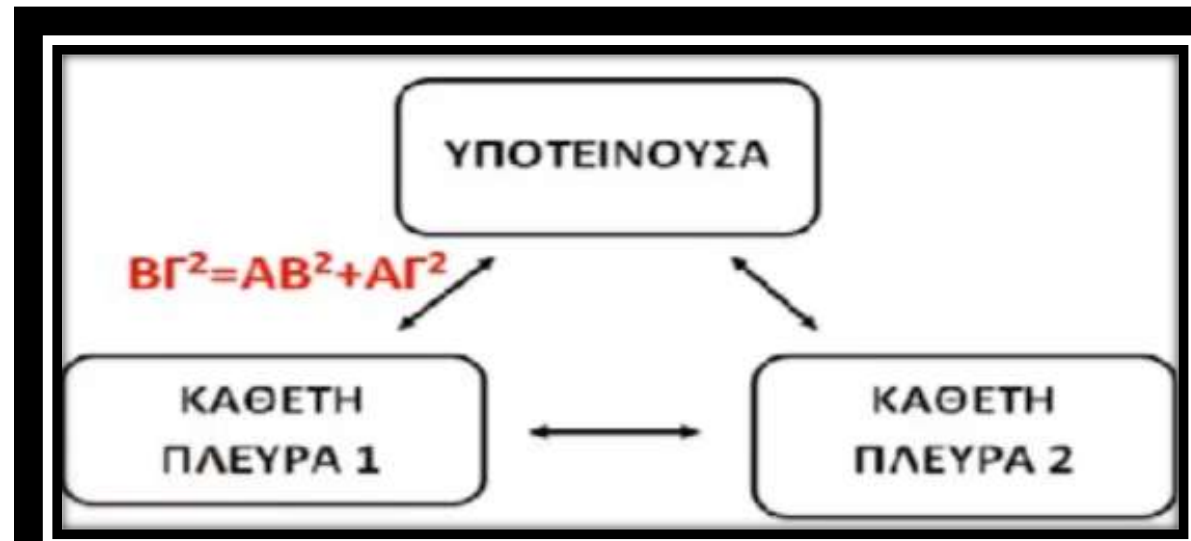
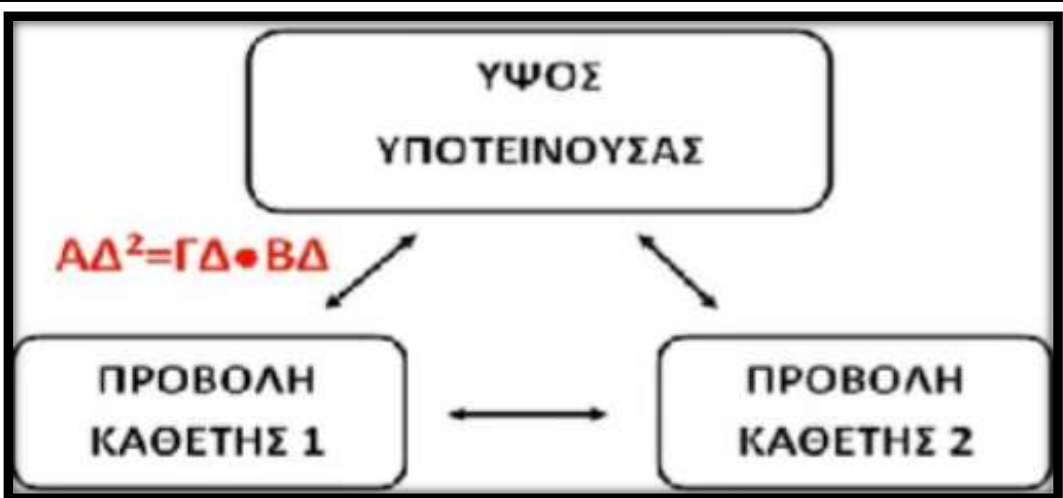
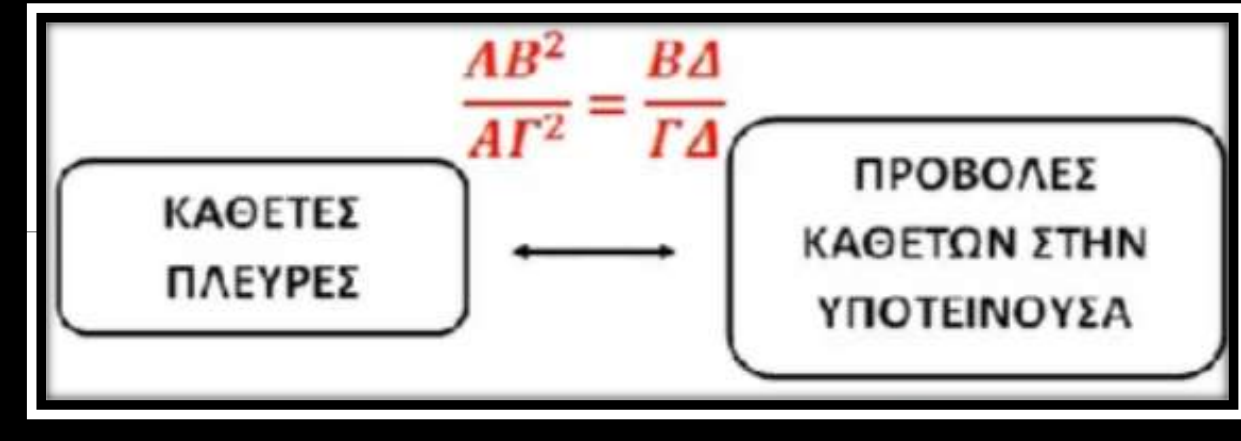
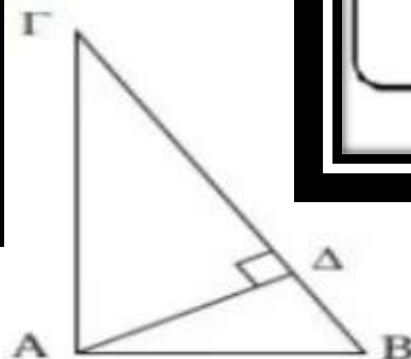
ΑΠΟΔΕΙΞΗ

Έστω ΑΔ το ύψος του ορθογώνιου τριγώνου ΑΒΓ (σχ.4), που αντιστοιχεί στην υποτείνουσα. Θα αποδείξουμε ότι

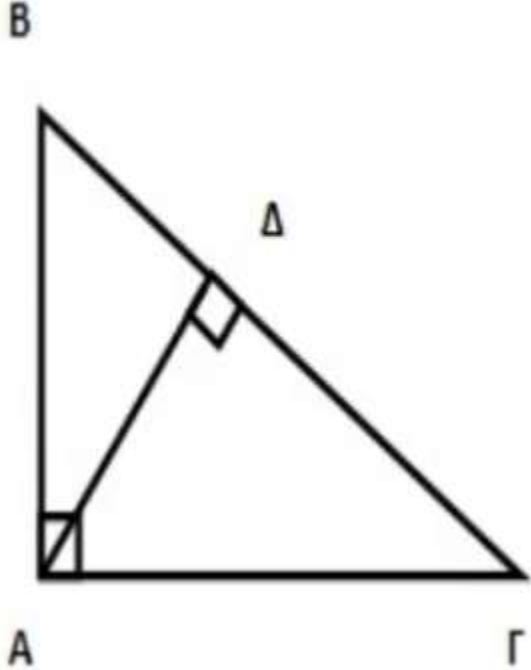
$$ΑΔ^2 = ΒΔ \cdot ΔΓ$$

Τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΓΑΔ είναι όμοια, αφού είναι ορθογώνια και $\hat{A}_1 = \hat{\Gamma}$ ως συμπληρωματικές της $\hat{B}$. Επομένως, οι πλευρές τους είναι ανάλογες, δηλαδή $\frac{ΑΔ}{ΒΔ} = \frac{ΔΓ}{ΑΔ}$, οπότε $ΑΔ^2 = ΒΔ \cdot ΔΓ$.

Εφαρμογή τύπων σε ασκήσεις



Παράδειγμα

ΔΕΔΟΜΕΝΑ	ΣΧΗΜΑ	ΛΥΣΗ
$\hat{A}=90$ $AB=4, BG=8$ AD ΥΨΟΣ		$AB^2 = BD \cdot BG \Leftrightarrow 16 = BD \cdot 8 \Leftrightarrow BD = 2$ $DG = BG - BD = 8 - 2 = 6 \Leftrightarrow DG = 6$
ΖΗΤΟΥΜΕΝΑ		$AD^2 = BD \cdot DG = 2 \cdot 6 = 12 \Leftrightarrow AD = \sqrt{12}$
ΠΡΟΒ ΤΗΣ AB ΣΤΗ BG ΠΡΟΒ ΤΗΣ AG ΣΤΗ BG AD, AG		$AG^2 = BG \cdot DG = 6 \cdot 8 = 48 \Leftrightarrow AG = \sqrt{48}$ $AB^2 + AG^2 = BG^2 \text{ ή } \alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$