

1.4 Συντεταγμένες στο Επίπεδο

Συντεταγμένες Διανυσμάτων

Αν $\vec{\alpha}$ διάνυσμα του επιπέδου τότε γράφεται με μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των μοναδιαίων διανυσμάτων $\vec{i}$ $\vec{j}$: $\vec{\alpha} = x\vec{i} + y\vec{j}$

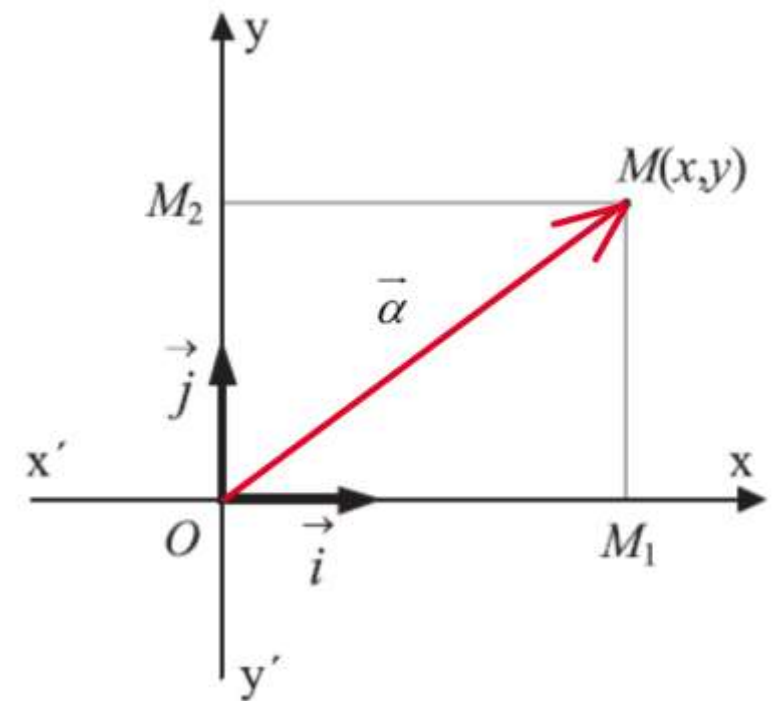
Όπου $x\vec{i}$ συνιστώσα του $\vec{\alpha}$ κατά τη φορά του $\vec{i}$

$y\vec{j}$ συνιστώσα του $\vec{\alpha}$ κατά τη φορά του $\vec{j}$

x τετμημένη του $\vec{\alpha}$

y τεταγμένη του $\vec{\alpha}$

x, y συντεταγμένες του $\vec{\alpha}$



Συντεταγμένες Γραμμικού Συνδυασμού Διανυσμάτων

$$\text{αν } \vec{\alpha} = (x_1, y_1) \text{ και } \vec{\beta} = (x_2, y_2)$$

$$\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \quad \text{και} \quad \lambda \vec{\alpha} = (\lambda x_1, \lambda y_1)$$

$$(x_1, y_1) + (x_2, y_2) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$$

$$\lambda(x_1, y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1)$$

$$\lambda \vec{\alpha} + \mu \vec{\beta} = (\lambda x_1, \lambda y_1) + (\mu x_2, \mu y_2) = (\lambda x_1 + \mu x_2, \lambda y_1 + \mu y_2)$$

Συντεταγμένες Μέσου Τμήματος

Ας θεωρήσουμε δύο σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ του καρτεσιανού επιπέδου και ας υποθέσουμε ότι (x, y) είναι οι συντεταγμένες του μέσου M του AB .

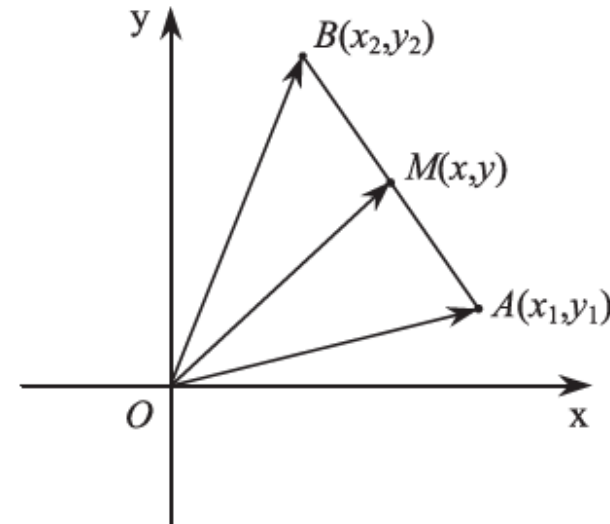
$$\text{Επειδή } \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}), \text{ και}$$

$$\overrightarrow{OM} = (x, y), \overrightarrow{OA} = (x_1, y_1), \overrightarrow{OB} = (x_2, y_2),$$

έχουμε

$$(x, y) = \frac{1}{2}[(x_1, y_1) + (x_2, y_2)] = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

Επομένως ισχύει



$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{και} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Παράδειγμα 1

Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = 2\vec{i}$, $\vec{\beta} = -\vec{i} + 2\vec{j}$ και $\vec{\gamma} = (1, 3)$.

Να βρείτε τα διανύσματα

1. $\vec{\alpha} + \vec{\beta}$, 2. $3\vec{\beta}$ 3. $2\vec{\alpha} - 3\vec{\gamma}$

Λύση:

Το διάνυσμα $\vec{\alpha} = 2\vec{i} + 0\vec{j} = (2, 0)$ ενώ το $\vec{\beta} = -\vec{i} + 2\vec{j} = (-1, 2)$. Άρα:

1. $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = (2, 0) + (-1, 2) = (2 - 1, 0 + 2) = (1, 2)$.

2. $3\vec{\beta} = 3 \cdot (-1, 2) = (3 \cdot (-1), 3 \cdot 2) = (-3, 6)$.

3. $2\vec{\alpha} - 3\vec{\gamma} = 2(2, 0) - 3(1, 3) = (4, 0) - (3, 9) = (4 - 3, 0 - 9) = (1, -9)$.

Παράδειγμα

Έστω τα σημεία $A(4,-1)$ και $B(-2,7)$, να βρεθούν οι συντεταγμένες του μέσου M του διανύσματος AB .

$$x_M$$

$$y_M$$

Άρα $M(1,3)$

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad \text{και} \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

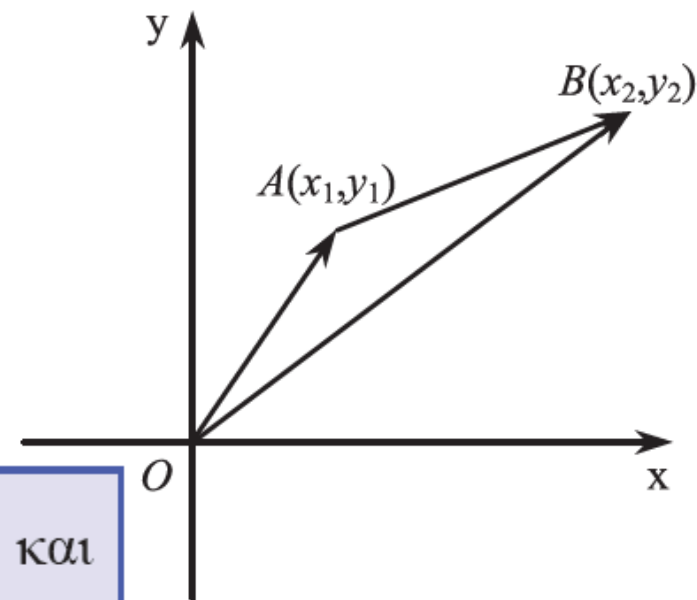
Συντεταγμένες Διανύσματος με Γνωστά Άκρα

Ας θεωρήσουμε δύο σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ του καρτεσιανού επιπέδου

$$\overrightarrow{AB} = (x, y) \quad \overrightarrow{OB} = (x_2, y_2) \quad \overrightarrow{OA} = (x_1, y_1)$$

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

$$(x, y) = (x_2, y_2) - (x_1, y_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$



Οι συντεταγμένες (x, y) του διανύσματος με άκρα τα σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ δίνονται από τις σχέσεις

$$x = x_2 - x_1 \quad \text{και} \quad y = y_2 - y_1.$$

Παράδειγμα

το διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ με αρχή το $A(1,2)$ και πέρας το $B(3,7)$

Έχει συντεταγμένες

$x=$

$y=$

$\overrightarrow{AB} =$

Μέτρο Διανύσματος

$$\text{Αν } \vec{\alpha} = (x, y), \text{ τότε } |\vec{\alpha}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Η απόσταση των σημείων $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ είναι ίση με

$$(AB) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Παράδειγμα

η απόσταση των σημείων $A(2, -7)$ και $B(5, -3)$ είναι:

$(AB) =$

Παράδειγμα

Δίνονται σημεία $A(2,-3)$, $B(1,4)$ και $\Gamma(0,-1)$. Να βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{B\Gamma}$

$$\overrightarrow{AB} =$$

$$\overrightarrow{B\Gamma} =$$

Να βρείτε το
μέτρο του
διανύσματος

δύο
περιπτώσεις

Παράδειγμα 2

1. Δίνονται τα σημεία $A(2, -3)$, $B(1, 4)$ να βρεθεί το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$.

2. Να βρεθεί το μέτρο του διανύσματος $\vec{a} = (-1, 2)$.

Λύση:

1. Το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ είναι:

$$\begin{aligned}(AB) &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \\&= \sqrt{(1 - 2)^2 + (4 - (-3))^2} \\&= \sqrt{(-1)^2 + (4 + 3)^2} = \sqrt{1 + 7^2} = \sqrt{1 + 49} = \sqrt{50}\end{aligned}$$

2. Το μέτρο του διανύσματος $\vec{a}$ δίνεται:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4} = \sqrt{5}$$

Παράδειγμα

Αν $A(-2, 1)$ και $B(1, 4)$ είναι οι δύο κορυφές του παραλληλόγραμμου $AB\Gamma\Delta$ και $K(2, -3)$ το κέντρο του, να βρεθούν οι συντεταγμένες των κορυφών Γ και Δ .

Συνθήκη Παραλληλίας Διανυσμάτων

Έστω $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ δύο διανύσματα του καρτεσιανού επιπέδου

$$\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = 0$$

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = x_1 y_2 - x_2 y_1$$

$$\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0$$

παράδειγμα

Τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (\sqrt{3}, -1)$ και $\vec{\beta} = (3, -\sqrt{3})$ είναι παράλληλα ;

$$\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) =$$

Τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, 3)$ και $\vec{\beta} = (-1, 2)$;

$$\det(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) =$$

Για ασκήσεις:

- Αν $A(x, y)$ τότε $\vec{OA} = (x, y)$
- Αν $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$, τότε:
 - ❖ **Ίσα διανύσματα** $\vec{\alpha} = \vec{\beta}$ έχω αν έχω ίσες τετμημένες και τεταγμένες δηλαδή
 $x_1 = x_2$ και $y_1 = y_2$
 - ❖ **Αντίθετα διανύσματα** $\vec{\alpha} = -\vec{\beta}$ έχω αν έχω αντίθετες τετμημένες και τεταγμένες, δηλαδή $x_1 = -x_2$ και $y_1 = -y_2$
- Αν M σημείο του $x'x$ τότε το $M(x, 0)$ και αν N σημείο του $y'y$ τότε $N(0, y)$.
- Αν $\vec{\alpha} = (x, y)$. Τότε αν $\vec{\alpha} = \vec{0}$ όταν οι $x=0$ και $y=0$
- Αν $\vec{\alpha} = (x, y)$. τότε αν $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ όταν οι $x \neq 0$ ή $y \neq 0$
- Αν $M(x, y)$ σημείο του επιπέδου, τότε απέχει από τους άξονες:
 - Απόσταση από $x'x$: $d(M, x'x) = |y|$
 - Απόσταση από $y'y$: $d(M, y'y) = |x|$
 - Απόσταση από το O: $d(MO) = \sqrt{x^2 + y^2}$

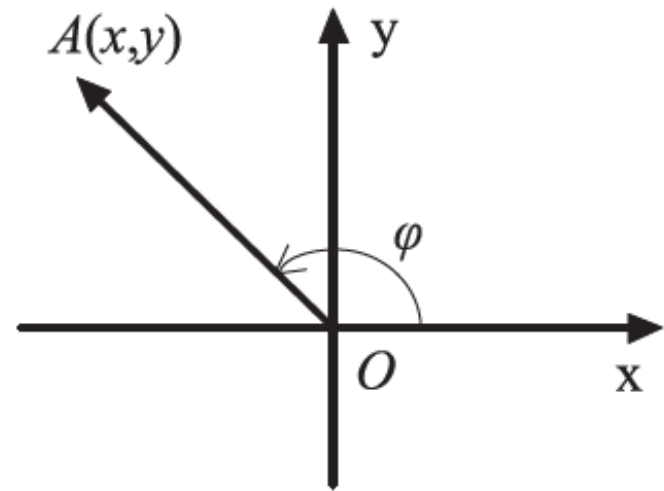
Συντελεστής Διεύθυνσης Διανύσματος

- Έστω $\vec{a} = (x, y)$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα και A το σημείο του επιπέδου για το οποίο ισχύει $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$. Τη γωνία φ , που διαγράφει ο ημιάξονας Ox αν στραφεί γύρω από το O κατά τη θετική φορά μέχρι να συμπέσει με την ημιευθεία OA , την ονομάζουμε **γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα $\vec{a}$ με τον άξονα $x'x$** . Είναι φανερό ότι

$$0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Αν το διάνυσμα a δεν είναι παράλληλο προς τον άξονα $y'y$ ισχύει

$$\varepsilon\varphi\varphi = \frac{y}{x}$$



Το πηλίκο $\frac{y}{x}$ της τεταγμένης προς την τετμημένη του διανύσματος $\vec{\alpha} = (x, y)$, με $x \neq 0$, το λέμε **συντελεστή διεύθυνσης** του $\vec{\alpha}$ και τον συμβολίζουμε με $\lambda_{\vec{\alpha}}$ ή απλώς με λ . Επομένως:

$$\lambda = \frac{y}{x} = \text{εφ}\varphi$$

Είναι φανερό ότι

— Αν $y = 0$, δηλαδή αν $\vec{\alpha} // x'x$, τότε ο συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{\alpha}$ είναι ο $\lambda = 0$.

— Αν $x = 0$, δηλαδή αν $\vec{\alpha} // y'y$, τότε **δεν ορίζεται** συντελεστής διεύθυνσης του διανύσματος $\vec{\alpha}$.

- Ας θεωρήσουμε τώρα δύο διανύσματα $\vec{\alpha} = (x_1, y_1)$ και $\vec{\beta} = (x_2, y_2)$ με συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 αντιστοίχως. Τότε έχουμε τις ισοδυναμίες:

$$\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x_1 y_2 = x_2 y_1 \Leftrightarrow \frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2.$$

Επομένως, η συνθήκη παραλληλίας για δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ με συντελεστές διεύθυνσης λ_1 και λ_2 διατυπώνεται ως εξής:

$$\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2$$

Παράδειγμα

Να βρεθούν οι τιμές του $\mu \in \mathbb{R}$ για τις οποίες τα σημεία $A(1,0)$, $B(-\mu^2,3)$ και $\Gamma(-5\mu,9)$ είναι συνευθειακά.
