

1.3 Πολλαπλασιασμός Αριθμού με Διάνυσμα

Ορισμός Πολλαπλασιασμού Αριθμού με Διάνυσμα

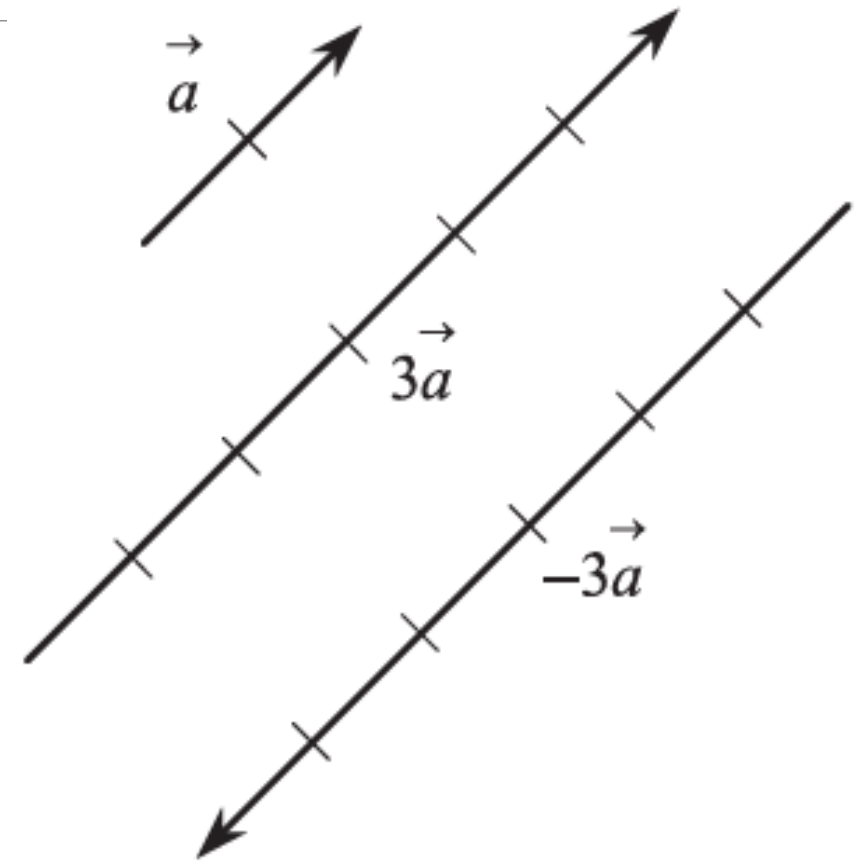
Έστω λ ένας πραγματικός αριθμός με $\lambda \neq 0$ και $\vec{\alpha}$ ένα μη μηδενικό διάνυσμα. Ονομάζουμε **γινόμενο του λ με το $\vec{\alpha}$** και το συμβολίζουμε με $\lambda \cdot \vec{\alpha}$ ή $\lambda \vec{\alpha}$ ένα διάνυσμα το οποίο:

- είναι ομόρροπο του $\vec{\alpha}$, αν $\lambda > 0$ και αντίρροπο του $\vec{\alpha}$, αν $\lambda < 0$ και
- έχει μέτρο $|\lambda| |\vec{\alpha}|$.

Αν είναι $\lambda = 0$ ή $\vec{\alpha} = \vec{0}$, τότε ορίζουμε ως $\lambda \cdot \vec{\alpha}$ το μηδενικό διάνυσμα $\vec{0}$.

Τριπλάσιο

Για παράδειγμα, αν το διάνυσμα $\vec{a}$ του διπλανού σχήματος έχει μέτρο 2, τότε το διάνυσμα $3\vec{a}$ είναι ομόρροπο με το $\vec{a}$ και έχει μέτρο $|3\vec{a}| = 3|\vec{a}| = 3 \cdot 2 = 6$, ενώ το διάνυσμα $-3\vec{a}$ είναι αντίρροπο με το $\vec{a}$, αλλά έχει και αυτό μέτρο ίσο με $|-3\vec{a}| = |-3||\vec{a}| = 3 \cdot 2 = 6$.



γενικά

$$\frac{1}{\lambda} \cdot \vec{\alpha} = \frac{\vec{\alpha}}{\lambda}$$

Ιδιότητες Πολλαπλασιασμού Αριθμού με Διάνυσμα

$$(1) \quad \lambda(\vec{\alpha} + \vec{\beta}) = \lambda\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$$

$$(2) \quad (\lambda + \mu)\vec{\alpha} = \lambda\vec{\alpha} + \mu\vec{\alpha}$$

$$(3) \quad \lambda(\mu\vec{\alpha}) = (\lambda\mu)\vec{\alpha}$$

επιμερ.

προσεταιρ.

Συνέπειες του ορισμού του γινομένου αριθμού με διάνυσμα και των παραπάνω ιδιοτήτων

$$(i) \quad \lambda \vec{\alpha} = \vec{0} \Leftrightarrow \lambda = 0 \text{ ή } \vec{\alpha} = \vec{0}$$

$$(ii) \quad (-\lambda \vec{\alpha}) = \lambda(-\vec{\alpha}) = -(\lambda \vec{\alpha})$$

$$(iii) \quad \lambda(\vec{\alpha} - \vec{\beta}) = \lambda \vec{\alpha} - \lambda \vec{\beta} \quad \text{Ξιμμερ.}$$

$$(iv) \quad (\lambda - \mu)\vec{\alpha} = \lambda \vec{\alpha} - \mu \vec{\alpha}$$

$$(v) \quad \text{Αν } \lambda \vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta} \text{ και } \underline{\lambda \neq 0}, \text{ τότε } \vec{\alpha} = \vec{\beta}$$

$$(vi) \quad \text{Αν } \lambda \vec{\alpha} = \mu \vec{\alpha} \text{ και } \underline{\vec{\alpha} \neq \vec{0}}, \text{ τότε } \lambda = \mu.$$

Γραμμικός Συνδυασμός Διανυσμάτων

γραμμικός συνδυασμός δύο διανυσμάτων $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$

Κάθε διάνυσμα της μορφής $\vec{v} = \kappa\vec{\alpha} + \lambda\vec{\beta}$, όπου $\kappa, \lambda \in \mathbf{R}$

Προσοχή: Ένα διάνυσμα μπορεί να είναι γραμμικός συνδυασμός πολλών διανυσμάτων

Παράδειγμα το $\vec{v} = 3\vec{\alpha} - 2\vec{\beta} + 5\vec{\gamma}$

Είναι γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων α , β και γ .

Συνθήκη Παραλληλίας Διανυσμάτων

Όπως είδαμε, αν δύο διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$, όπου $\vec{\beta} \neq \vec{0}$, συνδέονται με τη σχέση $\vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}$, τότε τα διανύσματα αυτά είναι παράλληλα. Ισχύει όμως και το αντίστροφο. Δηλαδή, αν τα διανύσματα $\vec{\alpha}$ και $\vec{\beta}$ είναι παράλληλα και $\vec{\beta} \neq \vec{0}$, τότε υπάρχει μοναδικός αριθμός λ τέτοιος ώστε $\vec{\alpha} = \lambda \cdot \vec{\beta}$. Πράγματι, αν θέσουμε

$$\kappa = \frac{|\vec{\alpha}|}{|\vec{\beta}|}, \text{ τότε } |\vec{\alpha}| = \kappa |\vec{\beta}|. \text{ Συνεπώς:}$$

- Αν $\vec{\alpha} \uparrow\uparrow \vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha} = \kappa \vec{\beta}$.
- Αν $\vec{\alpha} \uparrow\downarrow \vec{\beta}$, τότε $\vec{\alpha} = -\kappa \vec{\beta}$.
- Αν $\vec{\alpha} = \vec{0}$, τότε $\vec{\alpha} = 0 \cdot \vec{\beta}$.

Συνθήκη παραλληλίας διανυσμάτων

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$ είναι δύο διανύσματα, με $\vec{\beta} \neq \vec{0}$, τότε

$$\vec{\alpha} // \vec{\beta} \Leftrightarrow \vec{\alpha} = \lambda \vec{\beta}, \lambda \in \mathbf{R}.$$

Παράδειγμα

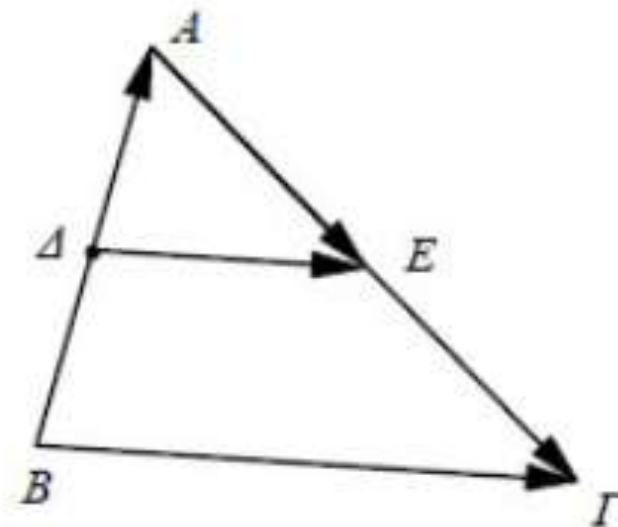
Αν Δ και E είναι τα μέσα των πλευρών AB και AG του τριγώνου $AB\Gamma$

$$\overrightarrow{B\Gamma} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AG} = 2\overrightarrow{\Delta A} + 2\overrightarrow{AE} = 2(\overrightarrow{\Delta A} + \overrightarrow{AE}) = 2\overrightarrow{\Delta E}$$

Αφού λοιπόν $\overrightarrow{B\Gamma} = 2\overrightarrow{\Delta E}$, συμπεραίνουμε ότι

$\Delta E \parallel B\Gamma$ και $|\overrightarrow{B\Gamma}| = 2|\overrightarrow{\Delta E}|$, που σημαίνει

$$\text{ότι } \Delta E = \frac{1}{2} B\Gamma.$$



Διανυσματική Ακτίνα Μέσου Τμήματος

Ας πάρουμε ένα διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ και ένα σημείο αναφοράς O . Επειδή $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$, έχουμε

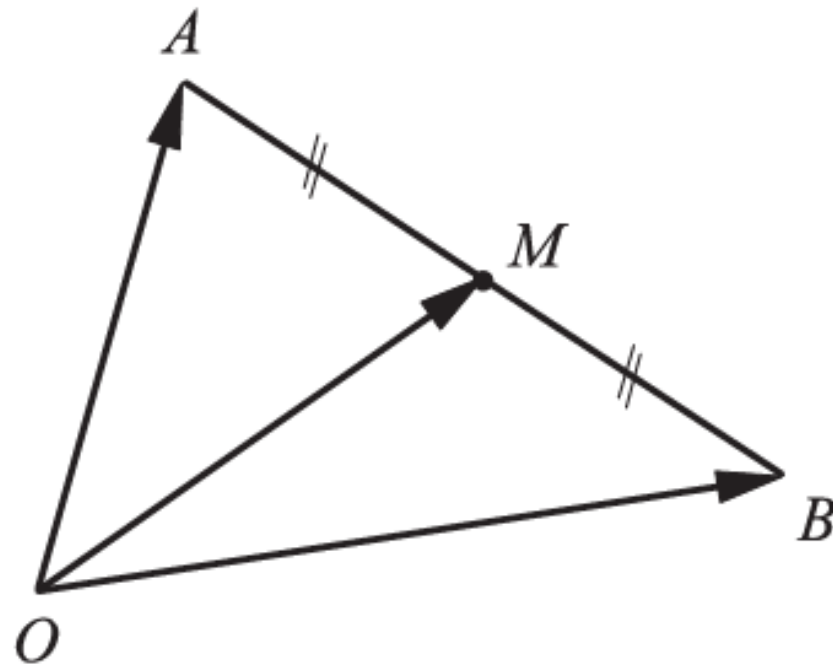
$$\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM},$$

οπότε

$$2\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

και άρα

$$\overrightarrow{OM} = \frac{\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}}{2}$$



Για ασκήσεις

Συνευθειακά : αν θέλω να δείξω ότι τρία σημεία A, B, Γ είναι συνευθειακά τότε αρκεί νδο $\overrightarrow{AB} = \kappa \overrightarrow{AG}$

ή $\overrightarrow{AB} = \kappa \overrightarrow{BG}$ ή οποιοδήποτε άλλο συνδυασμό γραμμάτων.

Αν $\kappa > 0$ τότε είναι ομόρροπα, ενώ αν $\kappa < 0$ αντίρροπα.

Παραλληλόγραμμο: αν θέλω νδο 4 σημεία A, B, Γ, Δ σχηματίζουν παραλληλόγραμμο τότε αρκεί

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DG} \quad \text{ή} \quad \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{DA}$$

Σημεία που Ταυτίζονται. Αν θέλω νδο 2 σημεία A, B ταυτίζονται τότε αρκεί: $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$

Σχέση που ισχύει. Αν θέλω νδο μια σχέση ισχύει:

1^η επιλογή. Επιλέγω ένα σημείο αναφοράς και το εφαρμόζω στη σχέση, μέχρι να φτάσω σε κάτι που ισχύει.

2^η επιλογή. Εφαρμόζω τους κανόνες τις πρόσθεσης και της αφαίρεσης, μέχρι να φτάσω σε κάτι που ισχύει.

Εύρεση σημείου. Αν μας ζητάει να βρούμε ένα σημείο από μια σχέση, επιλέγω σημείο αναφοράς το σημείο αυτό και το εφαρμόζω στη σχέση. Θα πρέπει το σημείο που ψάχνω να απομονωθεί στο ένα μέλος και στο άλλο μέλος να εμφανίζονται τα γνωστά σημεία.
