

# *1.2 ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΚΑΙ ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ*

---

ΦΩΚΑΣ ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ

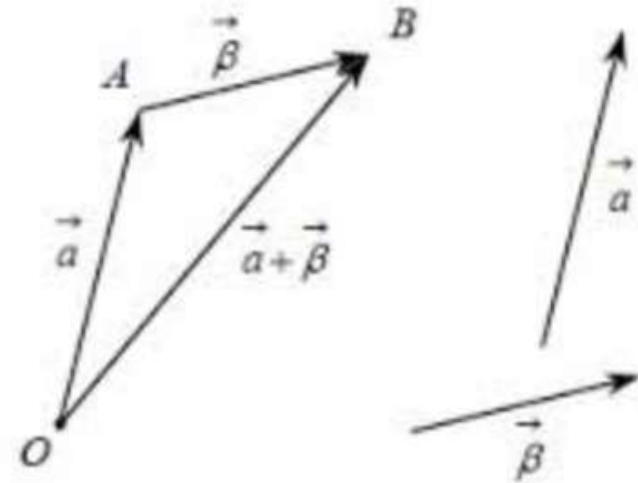
# Πρόσθεση Διανυσμάτων

Αν  $\vec{\alpha}$  και  $\vec{\beta}$  δύο διανύσματα του επιπέδου τότε, ονομάζουμε **άθροισμα ή συνισταμένη** των διανυσμάτων αυτών το διάνυσμα  $\vec{\alpha + \beta}$

**Πως υπολογίζω το άθροισμα;**

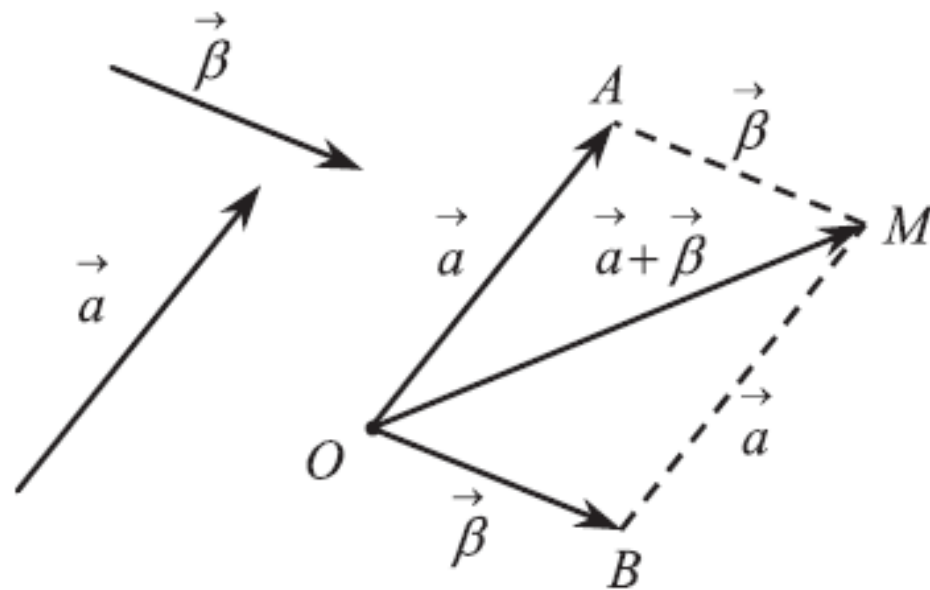
1<sup>ος</sup> τρόπος: παίρνω το πρώτο διάνυσμα και στο πέρας του τοποθετώ την αρχή του άλλου. Τέλος, ενώνω την αρχή του πρώτου με το πέρας του δεύτερου.

Αν  $\vec{\alpha} = \overrightarrow{OA}$  και  $\vec{\beta} = \overrightarrow{AM}$  τότε το άθροισμα τους είναι  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{OM}$



## 2<sup>ος</sup> τρόπος (Κανόνας Παραλληλογράμμου)

Τοποθετώ τα δυο διανύσματα έτσι ώστε να έχουν κοινή αρχή. Δημιουργώ παραλληλόγραμμο και παίρνω την διαγώνιο που ξεκινάει από την κοινή αρχή.



# Ιδιότητες Πρόσθεσης Διανυσμάτων

---

αν  $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$  είναι τρία διανύσματα, τότε:

$$(1) \quad \vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\beta} + \vec{\alpha} \quad (\text{Αντιμεταθετική ιδιότητα})$$

$$(2) \quad (\vec{\alpha} + \vec{\beta}) + \vec{\gamma} = \vec{\alpha} + (\vec{\beta} + \vec{\gamma}) \quad (\text{Προσεταιριστική ιδιότητα})$$

$$(3) \quad \vec{\alpha} + \vec{0} = \vec{\alpha}$$

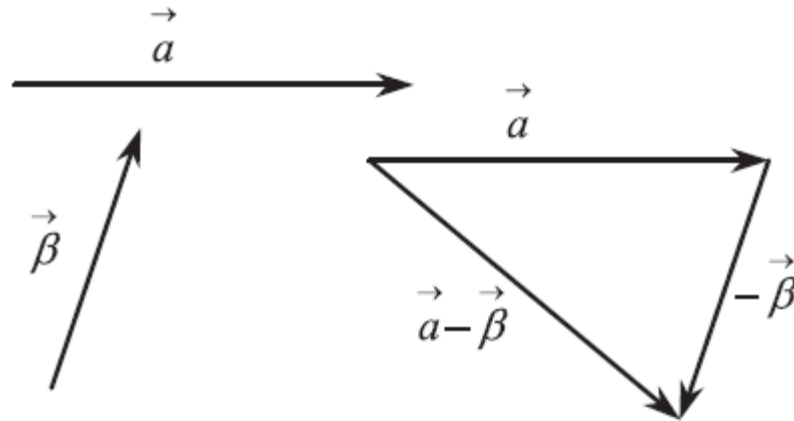
$$(4) \quad \vec{\alpha} + (-\vec{\alpha}) = \vec{0}.$$

# Αφαίρεση Διανυσμάτων

---

Η διαφορά  $\vec{a} - \vec{\beta}$  του διανύσματος  $\vec{\beta}$  από το διάνυσμα  $\vec{a}$  ορίζεται ως άθροισμα των διανυσμάτων  $\vec{a}$  και  $-\vec{\beta}$ . Δηλαδή

$$\vec{a} - \vec{\beta} = \vec{a} + (-\vec{\beta})$$



# Διάνυσμα Θέσεως

---

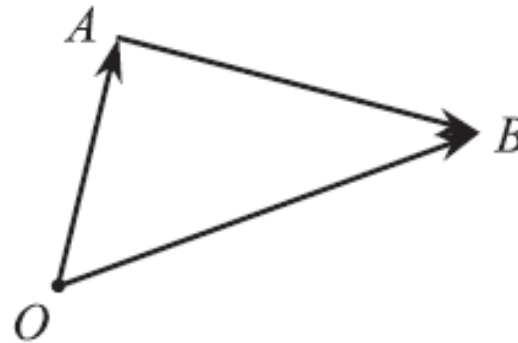
Έστω  $O$  ένα σταθερό σημείο του χώρου. Τότε για κάθε σημείο  $M$  του χώρου ορίζεται το διάνυσμα  $\overrightarrow{OM}$ , το οποίο λέγεται **διάνυσμα θέσεως του  $M$**  ή **διανυσματική ακτίνα του  $M$** . Το σημείο  $O$ , που είναι η κοινή αρχή όλων των διανυσματικών ακτίνων των σημείων του χώρου, λέγεται **σημείο αναφοράς** στο χώρο.

# Διάνυσμα Θέσεως

---

Αν  $O$  είναι ένα σημείο αναφοράς, τότε για οποιοδήποτε διάνυσμα  $\overrightarrow{AB}$  έχουμε  $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB}$  και επομένως

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$



Δηλαδή:

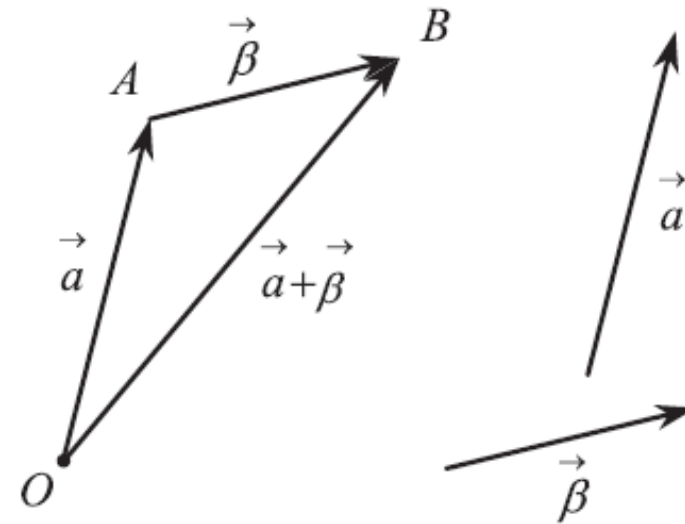
“Κάθε διάνυσμα στο χώρο είναι ίσο με τη διανυσματική ακτίνα του πέρατος μείον τη διανυσματική ακτίνα της αρχής”.

# Μέτρο Αθροίσματος Διανυσμάτων

Στο διπλανό σχήμα βλέπουμε το άθροισμα των διανυσμάτων  $\vec{a}$  και  $\vec{\beta}$ . Από την τριγωνική ανισότητα γνωρίζουμε όμως ότι

$$|(OA) - (AB)| \leq (OB) \leq (OA) + (AB)$$

$$||\vec{a}| - |\vec{\beta}|| \leq |\vec{a} + \vec{\beta}| \leq |\vec{a}| + |\vec{\beta}|$$



# ΘΑ ΧΡΕΙΑΣΤΟΥΜΕ ΓΙΑ ΤΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

---

**ΠΡΟΣΘΕΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ:** Για να προσθέσω δυο διανύσματα θα πρέπει το πέρας του 1<sup>ου</sup> να είναι ίσο με την αρχή του 2<sup>ου</sup>, δηλαδή:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BG} = \overrightarrow{AG}$$

**ΑΦΑΙΡΕΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ:** Για να αφαιρέσουμε δυο διανύσματα θα πρέπει η αρχή του 1<sup>ου</sup> να είναι ίση με την αρχή του 2<sup>ου</sup>, δηλαδή:

$$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AG} = \overrightarrow{GB}$$

**ΑΝΤΙΘΕΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ:** Σε ένα διάνυσμα μπορώ να αντιστρέψω την αρχή με το πέρας αλλάζοντας το πρόσημο, δηλαδή:

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$$

**ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΘΕΣΕΩΣ:** Σε οποιοδήποτε διάνυσμα επιτρέπεται να εισάγω ένα σημείο αναφοράς, δηλαδή:

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}$$

## ΑΣΚΗΣΗ

Για τέσσερα σημεία  $A, B, \Gamma, \Delta$  να αποδειχτεί ότι  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{\Delta\Gamma} = \overrightarrow{\Delta B} + \overrightarrow{A\Gamma}$ .

(Θα βάλουμε σημείο αναφοράς το  $O$  και θα χρησιμοποιήσουμε το διάνυσμα θέσεως)

---

---