

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

1.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

Μονόμετρα ή βαθμωτά μεγέθη

Μεγέθη τα οποία προσδιορίζονται από

- το μέτρο τους και από
- την αντίστοιχη μονάδα μέτρησης

λέγονται **μονόμετρα ή βαθμωτά**

Παραδείγματα: η μάζα, ο όγκος, η πυκνότητα, η θερμοκρασία κτλ.

ΟΡΙΣΜΟΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ

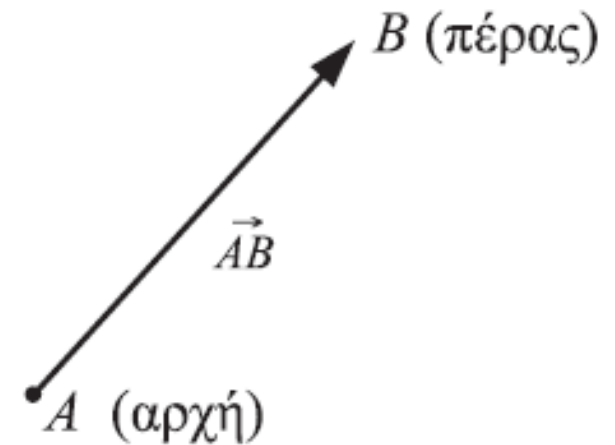
Διανυσματικά μεγέθη ή απλώς **διανύσματα** λέγονται τα μεγέθη, που για να τα προσδιορίσουμε, εκτός από το μέτρο τους και τη μονάδα μέτρησης, χρειαζόμαστε τη διεύθυνση και τη φορά τους.

Παραδείγματα: η δύναμη, η ταχύτητα, η επιτάχυνση, η μετατόπιση, η μαγνητική επαγωγή κτλ.

Στη Γεωμετρία το **διάνυσμα** ορίζεται ως ένα προσανατολισμένο ευθύγραμμο τμήμα, δηλαδή ως ένα ευθύγραμμο τμήμα του οποίου τα άκρα θεωρούνται διατεταγμένα.

Το πρώτο άκρο λέγεται **αρχή** ή **σημείο εφαρμογής** του διανύσματος, ενώ το δεύτερο λέγεται **πέρας** του διανύσματος.

Το διάνυσμα με αρχή το A και πέρας το B συμβολίζεται με $\overrightarrow{AB}$ και παριστάνεται με ένα βέλος που ξεκινάει από το A και καταλήγει στο B .



Μηδενικό διάνυσμα και συμβολισμοί

Αν η αρχή και το πέρας ενός διανύσματος συμπίπτουν, τότε το διάνυσμα λέγεται **μηδενικό διάνυσμα**. Έτσι, για παράδειγμα, το διάνυσμα $\overrightarrow{AA}$ είναι μηδενικό διάνυσμα.

Για συμβολισμό διανυσμάτων χρησιμοποιούμε επίσης:

$$\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \dots, \vec{u}, \vec{v}, \dots$$

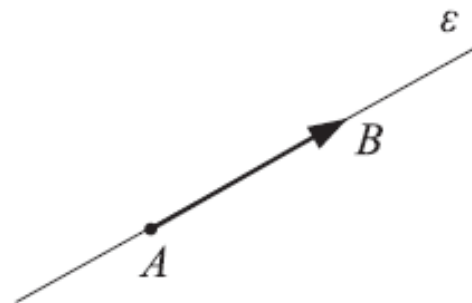
Μέτρο ή μήκος διανύσματος

Η απόσταση των άκρων ενός διανύσματος $\overrightarrow{AB}$, δηλαδή το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB , λέγεται μέτρο ή μήκος του διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ και συμβολίζεται με $|\overrightarrow{AB}|$

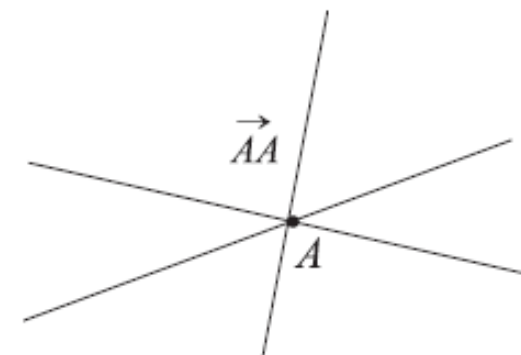
Αν το διάνυσμα $|\overrightarrow{AB}|$ έχει μέτρο 1, τότε λέγεται **μοναδιαίο διάνυσμα**

Φορέας διανύσματος

Η ευθεία πάνω στην οποία βρίσκεται ένα μη μηδενικό διάνυσμα $\overrightarrow{AB}$ λέγεται **φορέας** του $\overrightarrow{AB}$



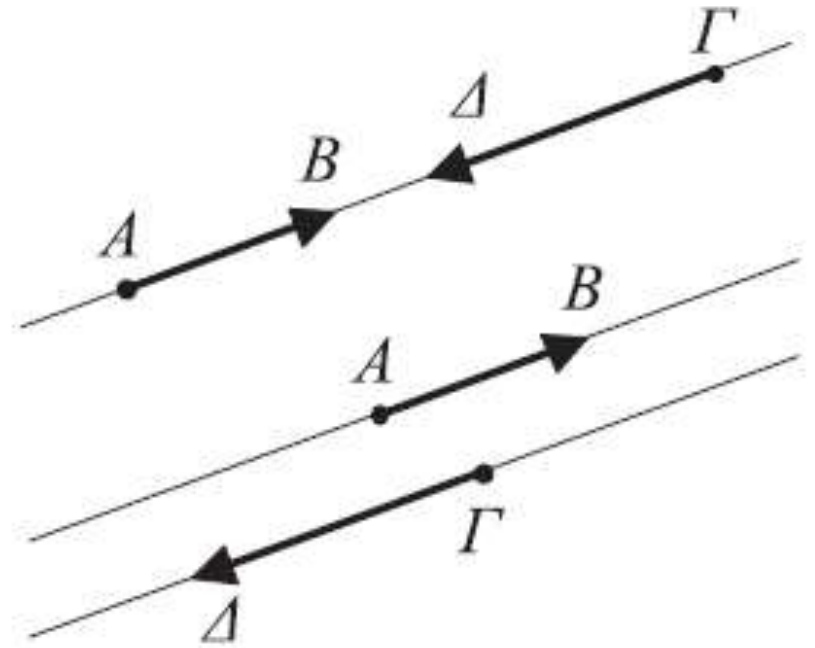
Ως φορέα ενός μηδενικού διανύσματος $\overrightarrow{AA}$ μπορούμε να θεωρούμε οποιαδήποτε από τις ευθείες που διέρχονται από το A .



Αν ο φορέας ενός διανύσματος $\overrightarrow{AB}$ είναι παράλληλος ή συμπίπτει με μια ευθεία ζ , τότε λέμε ότι το $\overrightarrow{AB}$ είναι παράλληλο προς τη ζ και γράφουμε $\overrightarrow{AB} // \zeta$.

Παράλληλα ή συγγραμμικά διανύσματα

- Δύο μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$, που έχουν τον ίδιο φορέα ή παράλληλους φορείς, λέγονται **παράλληλα ή συγγραμμικά** διανύσματα. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι τα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ έχουν **ίδια διεύθυνση** και γράφουμε $\overrightarrow{AB} // \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.

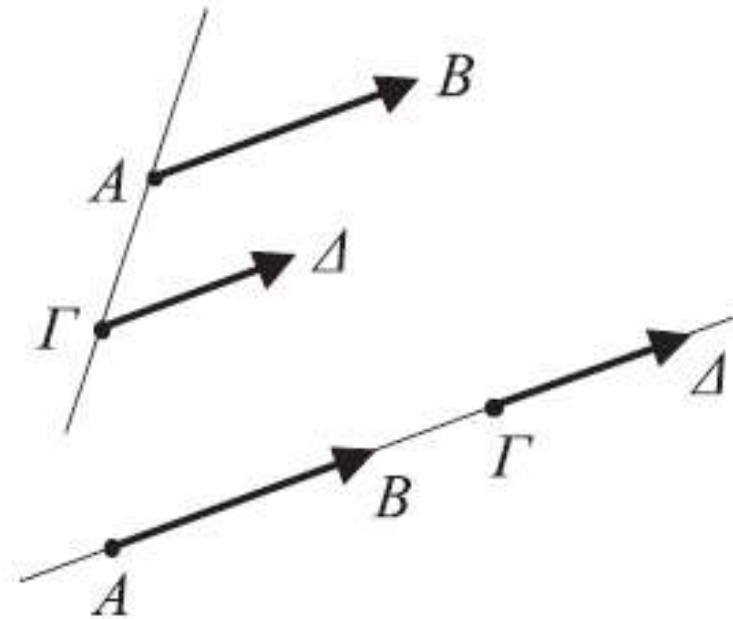


Τα συγγραμμικά διανύσματα διακρίνονται σε **ομόρροπα** και **αντίρροπα**.

— Δύο μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ λέγονται **ομόρροπα**:

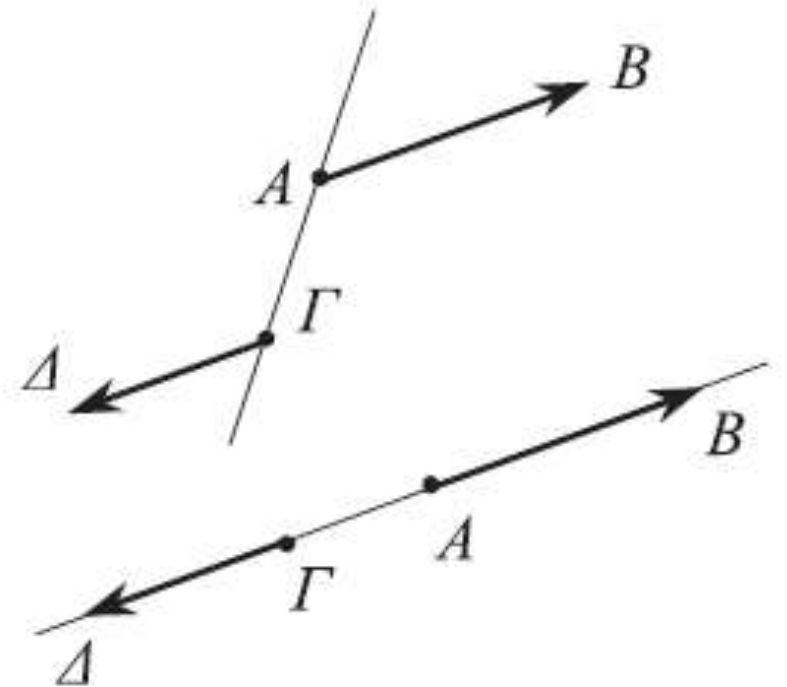
- α) όταν έχουν παράλληλους φορείς και βρίσκονται στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ευθεία AG που ενώνει τις αρχές τους ή
- β) όταν έχουν τον ίδιο φορέα και μία από τις ημιευθείες AB και $\Gamma\Delta$ περιέχει την άλλη.

Στις περιπτώσεις αυτές λέμε ότι τα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ έχουν την **ίδια κατεύθυνση** (ίδια διεύθυνση και ίδια φορά) και γράφουμε $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.



Αντίρροπα διανύσματα

— Δύο μη μηδενικά διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ λέγονται **αντίρροπα**, όταν είναι συγγραμμικά και δεν είναι ομόρροπα. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι τα διανύσματα $\overrightarrow{AB}$ και $\overrightarrow{\Gamma\Delta}$ έχουν **αντίθετη κατεύθυνση** (ίδια διεύθυνση και αντίθετη φορά) και γράφουμε $\overrightarrow{AB} \updownarrow \overrightarrow{\Gamma\Delta}$.



Ίσα Διανύσματα

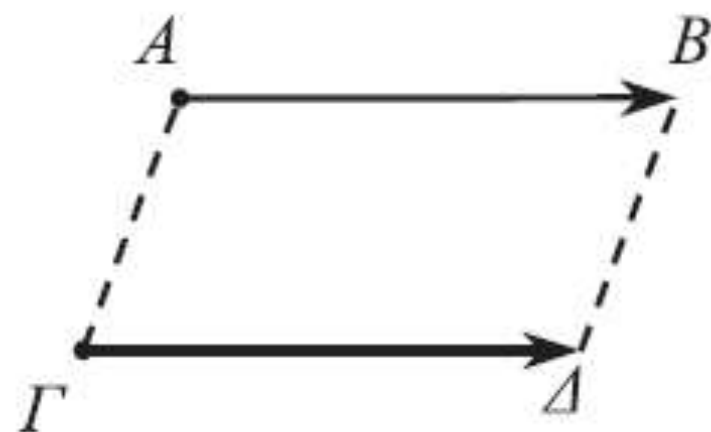
Δύο μη μηδενικά διανύσματα λέγονται **ίσα** όταν έχουν

- την ίδια κατεύθυνση και
- ίσα μέτρα

Δηλαδή $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$

Τα μηδενικά διανύσματα θεωρούνται ίσα μεταξύ τους και συμβολίζονται με $\vec{0}$

- Αν $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Gamma\Delta}$, τότε $\overrightarrow{A\Gamma} = \overrightarrow{B\Delta}$, $\overrightarrow{\Delta B} = \overrightarrow{\Gamma A}$ και $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{\Delta\Gamma}$.



- Αν M είναι το μέσον του AB , τότε $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{MB}$ και αντιστρόφως.



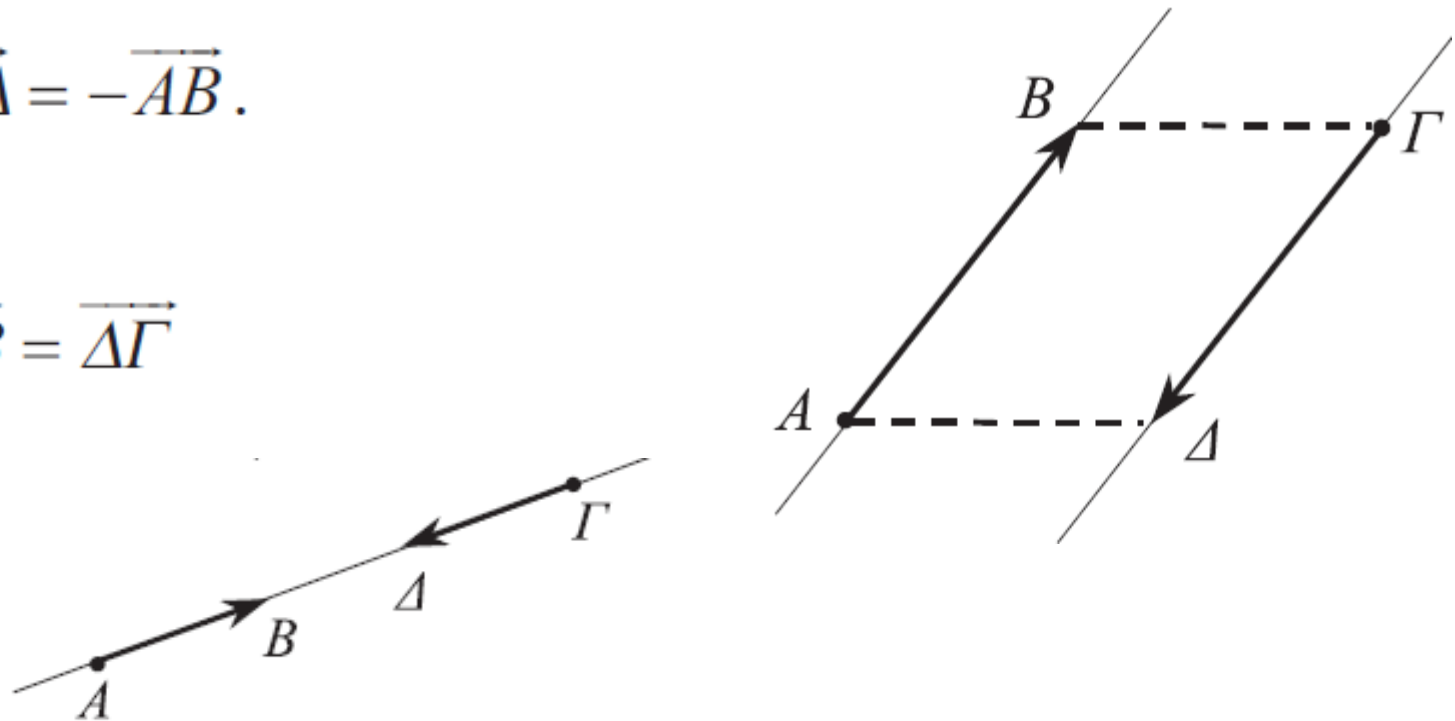
Αντίθετα Διανύσματα

Δύο διανύσματα λέγονται **αντίθετα**, όταν έχουν αντίθετη κατεύθυνση και ίσα μέτρα.

$$\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{\Gamma\Delta} \text{ ή } \overrightarrow{\Gamma\Delta} = -\overrightarrow{AB}.$$

και $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{\Gamma\Delta} \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{\Delta\Gamma}$

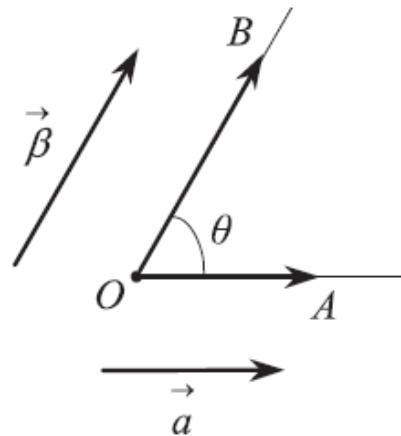
Γενικά $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$



Γωνία δύο Διανυσμάτων

Έστω δύο μη μηδενικά διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$. Με αρχή ένα σημείο O παίρνουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ και $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$.

Την κυρτή γωνία $A\hat{O}B$, που ορίζουν οι ημιευθείες OA και OB , την ονομάζουμε **γωνία των διανυσμάτων $\vec{a}$ και $\vec{b}$** και τη συμβολίζουμε με $(\vec{a}, \vec{b})$ ή $(\vec{b}, \vec{a})$ ή ακόμα, αν δεν προκαλείται σύγχυση, με ένα μικρό γράμμα, για παράδειγμα θ .



Για την γωνία θ $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ $0 \leq \theta \leq \pi$

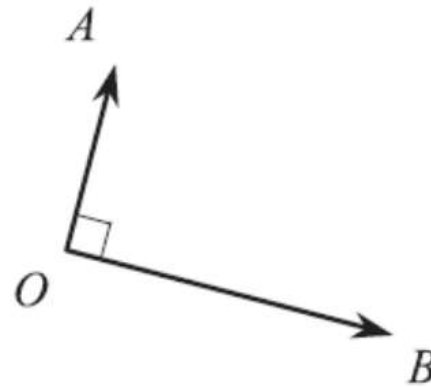
Αν $\theta=0$ τότε $\vec{\alpha} \uparrow \uparrow \vec{\beta}$



Αν $\theta=\pi$ τότε $\vec{\alpha} \uparrow \downarrow \vec{\beta}$



Αν $\theta=\frac{\pi}{2}$ τότε $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$



(ορθογώνια ή κάθετα)

ΑΣΚΗΣΗ

Έστω M το μέσο της πλευράς AI ενός τριγώνου ABI . Με αρχή το M γράφουμε τα διανύσματα $\overrightarrow{M\Delta} = \overrightarrow{IB}$ και $\overrightarrow{ME} = \overrightarrow{BA}$. Να αποδειχτεί ότι το A είναι το μέσο του ΔE .